Philos.
1201

Sta… …thek
Reg…nsburg

Ex libris
Conventus Ratisbonenſis
Carmelitarum
Diſcalceatorum.

Num.

Phil 1201

# Anfangsgründe
der
# Algebra
nebst
derselben Anwendung
auf die
# Rechenkunst
entworfen
von

**Matthias Butschany**
der k. K. Magistro, und der Weltweisheit
Doktorn.

---

WJEN,
gedruckt bey Joh. Thomas Edl. von Trattnern,
k. k. Hofbuchdruckern und Buchhändlern.
1767.

Staatl. Bibliothek
Regensburg

# Vorrede.

Geneigter Leser!

Ich überreiche denen, die die Addition, Subtraction, Multiplication, und die Division in ganzen, und gebro-
chenen Zahlen bereits gelernet haben, die Algebra, nebst derselben Anwendung auf die Rechenkunst, die ich so einzurichten trachtete, daß man sie in einer genauern Ordnung, leicht, und in der Kürze er-
lernen, und in allen Ständen, bey allen vorkommenden Fällen mit einem wahren Nutzen und Vergnügen brauchen könne. Ich habe die Anwendung der Algebra auf die Rechenkunst, und die theils gemeine, theils höhere Geometrie von der Algebra abgesondert, damit ich die Zahl derjeni-
gen nicht vermehre, die einerley Wissen-
schaften unter verschiedenen, und verschie-
dene unter einerley Namen vortragen. Ich schmeichle mir sicher vor allem Irr-
thum zu seyn, wenn ich von der Algebra nichts mehr fordere, als eine Anweisung eine Gleichung zu machen, und den Werth von den in ihr vorkommenden unbekann-
ten Größen zu bestimmen. Die Anwen-

dung der Algebra auf die Rechenkunst, und auf die theils gemeine, theils höhere Geometrie werde ich nicht als ein wesentliches Stück von der Algebra ansehen, nur alsdann, wenn ich mich überredet habe, daß die Anwendung der Addition, Subtraction ꝛc. auf die Kaufmanns-Waaren, auf die Apothekers-Waaren ꝛc. auch ein wesentliches Stück von der gemeinen Rechenkunst sey. Die Anwendung der Algebra auf die theils gemeine, theils höhere Geometrie habe ich hier ausgelassen, weil zu dieser die wenigsten Belieben tragen, die ohnedem insbesondere erscheinen möchte, wenn der geneigte Leser dieses nicht mit ungeneigtem Willen aufnehmen wird. Geschrieben in Göttingen am 24. April 1761.

Vor-

# Vorbericht.

## In dem Vorbericht soll kurz vorgestellet werden.

I. Der Gegenstand der Algebra. Der Gegenstand der Algebra oder das, womit sich die Algebra beschäfftiget, ist eine Größe. Merket von dieser

1. Die Erklärung. Durch eine Größe verstehen wir alles dasjenige, was größer, oder kleiner werden kann. Z. E. Ein Haus, eine Zahl rc. ist eine Größe, denn ein Haus, eine Zahl rc. kann größer oder kleiner werden.



2. Ihre

2. Ihre Eigenschaften. Durch die Eigenschaften einer Größe verstehen wir alles dasjenige, was von ihr behauptet werden kann. Diese Eigenschaften können abgetheilet werden

1.) In die theoretische und praktische. Durch jene verstehe ich diejenigen Eigenschaften, die einer Größe zukommen, durch diese aber, die einer Größe zukommen müßen. Wenn man eine Größe mit einer andern vergleichet, (d. i. untersuchet, ob sie der andern gleich sey oder nicht) so findet man, daß ihr nichts anders, als was folget, zukömmt. Daß sie der andern gleich oder ungleich sey. Ist eine gewisse Größe der andern nicht gleich, so ist sie größer oder kleiner. Ist sie größer, so ist sie um eine gewisse Größe größer, oder etlichemal so groß. Ist sie kleiner, so ist sie um eine gewisse Größe kleiner, oder etlichemal so klein. Behauptet man, daß einer gewissen Größe etwas zukommen müße, so kann man nichts anders, als was folget, behaupten. Sie soll größer, oder kleiner werden. Wenn sie größer werden soll, so soll sie um eine gewisse Größe größer, oder etlichemal so groß werden. Wenn sie kleiner werden soll, so soll sie um eine gewisse Größe kleiner, oder etlichemal so klein werden. Diese praktische

Ei-

Eigenschaften sind der Grund von den vier Haupthandlungen, die man mit einer Größe vornehmen muß, wenn man sie verändern, oder das, was da verlanget wird, machen will. Denn will man eine Größe größer machen, und zwar um eine gewisse Größe, so muß man addiren, will man sie etlichemal so groß machen, so muß man multipliciren. Will man eine Größe kleiner machen, und zwar um eine gewisse Größe, so muß man von ihr subtrahiren, will man sie etlichemal so klein machen, so muß man sie dividiren.

2.) In die bekannte und unbekannte Eigenschaften. Aus denen theils theoretischen theils praktischen Eigenschaften entstehen unzählige Nebeneigenschaften. Wenn man eine Größe mit einer andern vergleichet, werden uns zwar vielleicht allzuviele Eigenschaften von derselben bey dem ersten Anblick in die Augen fallen, es werden aber vielleicht noch weit mehrere verborgen bleiben. Betrachtet z. E. diese Zahlen 3. 4. 5. 6. Die Eigenschaft von diesen Zahlen, daß eine um 1. größer sey als die andere, wird euch bald in die Augen fallen, daß aber die Cubi von 3. 4. und 5. zusammen genommen gleich seyn, dem Cubo von 6. wird noch vielleicht unbekannt seyn. Oft sind uns die Eigenschaften von einer Größe bekannt, aber

die Größe, welcher sie zukommen, ist uns unbekannt; und sehr oft ist uns eine Größe bekannt, allein ihre besondere Eigenschaften sind uns unbekannt.

II. Die Erklärung der Algebra. Eine Vorschrift gewisser Handlungen wird eine Regel genannt. So sind, die Regel de Tri, Societatis, Dupli &c. nichts anders als gewisse Vorschriften einiger Handlungen. Die Algebra ist eine Kunst auf eine kurze Art eine Regel ausfindig zu machen, nach welcher man sich richten muß, wenn man entweder eine unbekannte Größe, von der uns einige Eigenschaften gegeben worden sind, oder einer gegebenen Größe, ihre unbekannte Eigenschaften finden will, von welcher uns einige Eigenschaften gegeben worden sind.

Die Herren Algebraisten werden so gütig seyn, und mir weder als eine Unwissenheit, noch als einen Irrthum zuschreiben, wenn ich das Mittel, wodurch man ihrer Meynung nach die Größe oder ihre Eigenschaften suchen soll, nämlich die Gleichung aus der Erklärung der Algebra völlig auslasse. Denn, man findet viele Eigenschaften ohne alle Gleichungen.

III. Die Grundsätze der Algebra.

I. Wenn man gleiches zu gleichen addiret, was herauskömmt, ist gleich.

2. Wenn

2. Wenn man gleiches von gleichen subtrahiret, was herauskömmt, ist gleich.

3. Wenn man gleiches mit gleichen multipliciret, was herauskömmt, ist gleich.

4. Wenn man gleiches durch gleiches dividiret, was herauskömmt, ist gleich.

5. Wenn man aus gleichen Größen einerley Wurzeln ausziehet, die Wurzeln sind gleich.

6. Wenn man gleiche Größen in einerley Dignitäten erhöhet, die Dignitäten sind gleich.

IV. Die Theile der Algebra. Aus der gegebenen Erklärung der Algebra ist sehr leicht einzusehen, daß die Algebra zeigen müße. 1. Die Art und Weise, derer sie sich bedienet die Regeln kürzlich zu finden. Diese Art aber bestehet in bloßen Zeichen. 2. Gewisse Handlungen, durch welche man die Regel suchen muß. 3. Eine besondere Anweisung, wie man sich dieser Handlungen in Erfindung der Regel bedienen müße, nach welcher man die unbekannte Größe oder die Eigenschaften suchen muß. Von diesen drey Stücken, soll die Algebra in drey besonderen Theilen handeln.

V. Der Nutzen der Algebra. Ich habe keine Lust, mich in die Weitläuftigkeit all

Vortheile, die man sich aus der Algebra versprechen kann, zu erzählen einzulassen, ich will, was ich von dem herrlichen Nutzen der unvergleichlichen Algebra denke, in die zwey folgende Sätze zusammenfassen.

1. Wer die Algebra verstehet, und dieselbe in einem jeden vorkommenden Fall zu brauchen weiß, der braucht in dem ganzen Umfang der Mathematik nur wenig zu lernen, und wird doch sehr viel verstehen. Wer die Algebra verstehet, und sie zu brauchen weiß, der brauchet z. E. in der Rechenkunst keine regulam De Tri, Dupli, Societatis, Fusti, Virginum &c. er wird dem ungeachtet alle diejenige Größen finden, die man nach diesen Regeln suchen muß, ja, er ist selbst im Stande täglich mit tausend neuen und nützlichen Regeln die Rechenbücher zu bereichern. Verlanget von ihm; er soll euch eine gewisse Zahl suchen, er weiß die Regel vielleicht nicht, nach welcher er diese suchen sollte, allein, er wird sich gleich die Regel machen, und nach derselben die Zahl finden können.

2. Wer die Algebra nicht verstehet, und will ein Rechenmeister oder Mathematiker heissen, der muß über die massen viel auswendig lernen und behalten, und,

wenn

wenn er alles recht auswendig gelernet hat, so kann er sich doch keinen größeren Ruhm beylegen, als, daß er schon vielleicht den millionsten Theil von der Rechenkunst und der Mathematik verstehet. Bildet euch nur ein, ihr wolltet ein vollkommener Rechenmeister werden, wie dick sind die Bücher nicht, die euch die Rechenkunst vortragen, und die ihr doch auswendig lernen müßtet. Kommet ihr in die übrigen Theile der Mathematik, ihr werdet noch in einem jeden Theil hundert neue Regeln, die sich in keinem Rechenbuch befinden, lernen müßen. Und gesetzt, ihr wisset dieses alles schon, seyd ihr schon ein vollkommener Rechenmeister? Mathematiker? Im Vertrauen, und unter uns gesagt, ihr seyd noch ein kleiner Anfänger darinn. Denn es sind noch Million Größen, die euch unbekannt bleiben müßen, wo ihr die Algebram nicht versteht. Dem, der euch verspricht, ohne Algebra nach Anleitung eines mathematischen Büchleins zu vollkommenen Rechenmeistern und Geometris zu machen, dem, sage ich, trauet nicht, glaubet mir, er verspricht euch weit mehr als jener Maler, der den großen Christophel auf einem kleinen Hölzlein in der Lebensgröße malen wollte. Der stehet wirklich in den Gedanken, daß das Ende von der Rechenkunst, und der Mathematik da sey, wo

es der Buchdrucker gesetzet hat. Ich wünschte, daß doch diejenigen, die in der Mathematik, oder nur in der Rechenkunst etwas vorzügliches thun wollen, daß diejenigen, sage ich, sich nicht mit allzuvielen Regeln Fusti, Virginum, Pronica, Ausziehung allerley Wurzeln, und andern diesen ähnlichen Arbeiten beschweren möchten, denn das meiste was sie von dieser Arbeit behalten, ist die Kreide auf den Fingern. Wer es so weit gebracht hat, daß er fertig addiren, subtrahiren, multipliciren, und dividiren im Ganzen, und den Brüchen kann, der übe sich in der Algebra, und wähle sich ein Büchlein dazu, welches kurz, deutlich, gründlich und für alle Stände brauchbar eingerichtet ist, so wird er mit der Zeit erfahren, daß seine Etkenntniß, Verstand, Vernunft und Witz mehr in einer Stunde zugenommen, als sonst in hundert Stunden.

Die

# Die Abhandl. der Algebra.

## Der I. Theil.

### Von den Zeichen, durch welche man die Regel kurz finden kann.

§. 1.

In einer Regel kommen nur drey Stücke vor, die Namen der Größen, die Namen der Handlungen, und eine Bejahung, daß dieses jenem gleich, oder ungleich sey. Die Wörter von diesen drey Stücken können auf eine doppelte Weise geschrieben werden, wenn man das Wort mit allen Buchstaben so, wie es gemeiniglich üblich ist, oder nur mit einem Zeichen das ganze Wort ausdrücket. Das letzte wählen die Algebraisten, zum Theil die Aerzte, und die Musici, wobey sie allzuviele Vortheile finden. Ich will zeigen.

§. 2.

I. Wie man die Größe kurz bezeichnen kann. Dieses will ich in folgenden Sätzen vortragen.

1. Wollet ihr eine gewisse Größe bezeichnen, wählet dazu nur ein einziges Zeichen

wozu sich lateinische Buchstaben am besten schicken, und merket euch in Gedanken, oder schriftlich, daß der Buchstab die Größe bedeuten soll. Ich kann z. E. zweyhundert auf eine dreyfache Weise schreiben. Erstlich so, wie ich es jetzund geschrieben habe, zweytens so, 200. Drittens aber, nehme ich einen Buchstaben z. E. *a*, und bemerke mir, daß *a* zweyhundert bedeutet. Urtheilet, welches kürzer zu schreiben sey?

2. Weil die Größen zweyerley sind, bekannte, die uns gegeben sind, und unbekannte, die wir gemeiniglich suchen: so bezeichnet die bekannten mit den ersten Buchstaben des a b c als a, b, c, ꝛc. die unbekannten aber mit den letzten als x, y, z.

3. Bezeichnet einerley Größen mit einerley Buchstaben, die verschiedenen aber mit verschiedenen.

4. Bedienet euch die Größe zu bezeichnen des ersten Buchstabens aus dem Namen der Größe, wo es füglich angehen kann; so könnet ihr die Bedeutung des Buchstabens desto leichter behalten, z. E. Thaler schreibet *t*. Mariengroschen *m*. Haus *h*. ꝛc.

5. Wenn

5. Wenn die Größe, die euch gegeben ist, auch eine Zahl bedeutet, so schreibet doch anstatt der Zahl einen Buchstaben. z. E. statt 500. schreibet a, anstatt 3000. b. ꝛc.

6. Ihr könnet auch bisweilen mit einem sehr großen Vortheil anstatt einiger schon bekannten Größen einen neuen Buchstaben wählen, wenn ihr sie allzu oft abschreiben müßtet, z. E. a b c d schreibe ich a, anstatt a b c — d e schreibe ich b ꝛc.

Anm. Die Algebraisten pflegen sich nicht gerne folgender vier Buchstaben zu bedienen d s g o, dem ungeachtet, könnet ihr euch der zwey ersten sicher bedienen.

§. 3.

II. Wie man das Gleiche und Ungleiche bezeichnen soll.

1. Das Gleiche bezeichnet mit zwey gleichen, gleich weit von der linken zu der rechten Hand laufenden Strichen =. Dieses bedeutet, daß alles dasjenige, was vor demselben stehet gleich sey dem, was hinter demselben folget, z. E. 4. und 6. ist gleich 10. dies schreibe ich so: 4 und 6 = 10.

2. Das Ungleiche bezeichnet mit einem verkehrten V, und setzet das größere vor die Eröffnung, das kleine aber vor die Spitze.

z. E.

z. E. 12. ist größer als 8. oder, 6 ist kleiner als 10. setzet so:

$12 > 8. \quad 5 < 10.$

§. 4.

III. Wie man die Handlungen bezeichnen soll. Die Handlungen der Algebra sind die Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio, Erhöhung in eine gewisse Dignität, und Ausziehung der Wurzeln: allein der Algebraist machet nichts von allen diesen, sondern er bezeichnet nur, daß es gemacht werden soll. Ich will die Zeichen der Handlungen jetzund vortragen.

1. Das Zeichen der Addition. Das ist folgendes +. Schreibet vor die Größe die addiret werden soll das Zeichen +. z. E. 2 soll zu 4. oder *a* zu *b* addiret werden, schreibet so: $4 + 2$. $b + a$. Das Zeichen wird genannt plus, mehr, oder besser, und. Das obige wird so gelesen 4 mehr 2. b mehr a, oder 4 und 2, b und a.

§. 6.

2. Das Zeichen der Subtraction. Das ist folgendes —. Setzet vor die Größe, die subtrahiret werden soll das Zeichen — z. E. 2 soll von 4, *b* von *a* subtrahiret werden, setzet so: $4 - 2$. $a - b$. Das Zeichen wird

ge=

genannt minus, weniger. Das obige wird so gelesen 4. weniger 2. a weniger b.

§. 7.

1. Anm. Eine jede Größe muß eines von diesen zwey Zeichen + oder — haben.

2. Doch wenn eine Größe keine andere Größe vor sich hat, und sie sollte das Zeichen + haben, so wird es ausgelassen: z. E. + 2 + 4 setze ich so: 2 + 4. Von Anfang also der Reihe wird das Zeichen + immer ausgelassen.

3. Die Größe, die das Zeichen + hat, wird positiva, die aber das Zeichen — hat, negativa quantitas genannt.

§. 8.

3. Das Zeichen der Multiplication. Das ist folgendes × auch, auch, auch nichts. Setzet zwischen die Größen die miteinander multipliciret werden sollen × oder, oder: oder wenn es Buchstaben sind gar nichts. z. E. *a* soll mit *b* multipliciret werden, so setze ich es: a × b oder a, b oder a, b oder ab.

Anm. Das letzte ist das bequemste, und deswegen auch das gebräuchlichste. 2 soll mit 4. multipliciret werden, so setze ich es 2 × 4 oder 2, 4 oder 2, 4. 3, 4, 2. Das bedeutet 3 soll mit 4 multipliciret werden, und das Product 12. soll wiederum mit 2 multipliciret werden. a b c d. Das bedeutet so viel, a soll mit b multipliciret werden, das Product davon mit c, und noch das Product davon mit d.

§. 9.

4. Das Zeichen der Division. Das ist folgendes: auch —. Setzet das, welches getheilet werden soll vorn, den Divisorem hinten, und in die Mitte: oder setzet das, was getheilet werden soll, oben, den Divisorem unten, und das — darzwischen. Z. E. *a* soll dividiret werden durch *b*. 24 soll dividiret werden durch 3. setzet es so

a : b 24 : 3 oder $\frac{a}{b}$ $\frac{24}{3}$

§. 10.

5. Das Zeichen der Dignität. Das Product, welches aus der Multiplication einerley Factorum entstehet, wird eine Dignität auch eine Potenz genannt. Z. E. 4 ist entstanden aus der Multiplication 2 und 2, zwey einerley Factoribus, 4. ist also eine Dignität von 2. Diejenige Dignität, die aus zwey Factoribus entstanden ist, wird die zweyte, die aus drey die dritte, die aus vier die vierte Dignität oder Potenz genannt. Z. E. 4. entstehet aus 2, 2; 8 aus 2, 2, 2. 16 aus 2, 2, 2, 2. 4 ist also die zweyte, 8 die dritte, 16 die vierte Dignität von 2. Die zweyte Dignität wird gemeiniglich Quadrat, und die dritte Cubus genannt. Die Zahl der Factorum, aus welchen die Dignität entstehet, wird der

Exponens, oder auch der Name der Dignität genannt. Z. E. 2. ist der Exponens der Dignität vom Quadrat, 3 vom Cubus, 4. von der vierten, 5. von der fünften Dignität ꝛc. Eine gewisse Größe in die zweyte, dritte ꝛc. Dignität erhöhen oder erheben, heißt das Product von zwey, drey ꝛc. einerley Factoribus suchen. Z. E. die 2. in die vierte Dignität erhöhen, heißt das Product von diesen Factoribus 2, 2, 2, 2. suchen, und ist 16. Es wird verlangt das a, oder 3, soll in die vierte Dignität erhöhet werden, bezeichnet es so a a a a 3, 3, 3, 3. oder welches weit bequemer und deswegen auch gebräuchlicher ist; schreibet die Zahl oder den Buchstaben nur einmal, und oben, etwas zu der rechten Hand, den Namen der Dignität. Z. E. Das obige schreibe ich so $a^4$. $3^4$. Man muß sich in Acht nehmen, daß man das $a^4$ und 4a nicht vor einerley halte. Das $a^4$ ist das Product von vier nach einander folgenden a, das 4a aber ist die Summe von vier a. Es sey a = 3, so ist $a^4$ = 81. und 4a = 12.

§. 11.

6. Das Wurzelzeichen. Die Wurzel wird derjenige Factor genannt, aus dessen Multiplication die Dignität entstanden ist. Die Wurzel aber bekommt wiederum beson-

dere Namen von der gegebenen Dignität. So wird der Factor, aus dessen Multiplication die zweyte Dignität, oder das Quadrat entstanden ist, die Wurzel von der zweyten Dignität, oder die quadratische Wurzel genannt, und der Factor, aus dessen Multiplication der Cubus entstanden ist, wird die cubische Wurzel genannt ꝛc. Z. E. 2. ist die quadratische Wurzel von 4, $a$ von $a^2$. 2. ist die cubische Wurzel von 8, $a$ von $a^3$. 2 ist die Wurzel von der vierten Dignität von 16, $a$ von $a^4$. Die Wurzel ausziehen heisset den Factorem suchen, aus dessen Multiplication die Dignität entstanden ist. Der Name der Dignität ist auch der Name der Wurzel. Wenn die Wurzel nur aus einem Gliede bestehet, z. E. a oder 6, so wird sie eine uninomische Wurzel genannt, bestehet sie aber aus mehreren Gliedern z. E. $a + b$, $10 + 2$. so wird sie polynomische, und zwar insbesondere binomische, wenn sie aus zwey z. E. $a + b$ $10 + 2$ oder 12, trinomische, wenn sie aus $a + b + c$ $100 + 20 + 4$ oder 124. bestehet. Man kann sich vorstellen, daß eine jede Zahl aus der Multiplication zwey, drey ꝛc. einerley Factorum entstanden ist. Ist die Zahl wirklich aus solchen Factoribus entstanden, so wird sie eine Rational-Dignität genannt, ist sie aber nicht entstanden, Irrational. Man verlangt, ich soll

aus

aus der Zahl 12. oder a die cubische Wurzel ausziehen. Als ein Algebraist ziehe ich sie nicht heraus, sondern bezeichne nur mit dem folgenden Wurzelzeichen √ das daraus eine Wurzel ausgezogen werden soll, den Namen der Wurzel setze ich herein, z. E. $\sqrt[3]{12}$ $\sqrt[3]{a}$. Soll aber aus einer Größe die quadratische Wurzel ausgezogen werden, z. E. aus 12 oder a, so setze man in das Wurzelzeichen keinen Namen, z. E. $\sqrt{12}$ $\sqrt{a}$. Aus 15 soll die cubische und aus a die Wurzel der vierten Dignität ausgezogen werden, das bezeichne ich so $\sqrt[3]{15}$. $\sqrt[4]{a}$.

§. 12.

7. Eine Reihe von vier Größen, in welcher die erste um die Größe größer oder kleiner ist als die zweyte, um welche die dritte größer oder kleiner ist als die vierte, wird eine Proportio Arithmetica genannt. Z. E. 8 6 4 2. 8 ist um 2 größer als 6, und 4 auch um 2 größer als 2. Dieses wird so gesetzt $8 - 6 = 4 - 2$. Die Größe um welche die erste größer oder kleiner ist als die zweyte, wie z. E. hier 2. wird die Differenz genannt.

§. 13.

8. Eine Reihe von vier Größen, in welcher die erste so vielmal größer, oder kleiner

ist als die zweyte, wie vielmal die dritte grösser oder kleiner ist als die vierte, wird eine geometrische Proportion genannt: z. E. 8. 4. 12. 6. Die 8 ist zweymal so groß als 4. und 12 auch zweymal so groß als 6. Dieses wird so geschrieben $8 : 4 = 12 : 6$ oder $\frac{8}{4} = \frac{12}{6}$. Die Zahl, welche anzeiget wie vielmal das erste Glied größer oder kleiner ist als das zweyte, wie hier 2. wird der Exponent genannt.

Anm. Alle beyde werden so ausgesprochen: wie sich das erste Glied verhält zum zweyten, so verhält sich das dritte zum vierten.

§. 14.

## Allgemeine Anmerkungen, die sich auf den ganzen Theil beziehen.

1. Wenn da ganze Reihen von Größen sind, die addiret, subtrahiret ꝛc. werden sollen, so schliesset man sie in die Parentheses, oder man ziehet über die ganze Reihen einen Strich, und die Zeichen der Handlungen setzet man darzwischen. z. E. $abc - de$ soll addiret werden zu $ab + de - m$, so setzet man es so $(abc - de) + (ab + de - m)$ oder $\overline{abc - de} + \overline{ab + de - m}$. Von $abc - de$ soll subtrahiret werden $ab + de - m$, setzet es so $(abc - de) - (ab + de - m)$ Sie sollen multipliciret werden, setzet es so $(abc + de) \times$

$(ab+de-m)$ oder $(abc-de)\ (ab+de-m)$. Die erste Reihe soll dividiret werden durch die zweyte, setzet es so $(abc-de):(ab+de-m)$ oder welches weit bequemer ist $\frac{abc-de}{ab+de-m}$ Es soll $a+b$ in die dritte Dignität erhöhet werden, setzet es so $(a+b)^3$. Daraus soll die quadratische Wurzel ausgezogen werden $\sqrt{(a+b)}$.

2. Wenn wir wirklich dieses machen, was z. E. $a+b$ bedeutet, so erhalten wir die Summe von $a+b$. Man kann also dieses $a+b$ die Summe, $a-b$ die Differenz, $ab$ das Product, $\frac{a}{b}$ den Quotienten $(a+b)^3$ den Cubum, $\sqrt{(a+b)}$ die quadratische Wurzel von a und b nennen.

3. Einige Exempel zur Uebung.

| | | Es sey |
|---|---|---|
| $a+b = c-f.$ | $ab-cd = ce-ad.$ | $a = 30.$ |
| $a+b = c-e.$ | $ab+cde = 2bc+f+d.$ | $b = 6.$ |
| $a+b = df.$ | $\frac{ab+c}{e} = c+f-3$ | $c = 40.$ |
| $a+b = \frac{c}{b} + fd.$ | $\frac{ab-cd}{b-e} = c+de+d$ | $d = 2.$ |
| $a+b = b^2$ | $\frac{a^3+ab}{2a-be} = a.$ | $e = 4.$ |
| $a+b = \sqrt{k}.$ | | $f = 18.$ |
| $ab-c = ec-f-d.$ | | $k = 1296$ |

Es soll ferner seyn $a = 2$. $b = 3$.
So ist

| | | |
|---|---|---|
| $a = 2.$ | $b^4 = 81.$ | $3a^2 = 12.$ |
| $a^2 = 4$ | $b^3a^4 = 432.$ | $3a^2b = 36.$ |
| $a^3 = 8.$ | $ab = 6.$ | $3ab^2 = 54.$ |
| $a^4 = 16$ | $2ab = 12.$ | $4a^3 = 32.$ |
| $4a = 8.$ | $ab^2 = 18.$ | $4a^3b = 96.$ |
| $b = 3.$ | $a^2 b = 12.$ | $6a^2b^2 = 216.$ |
| $b^2 = 9.$ | $a^2b^2 = 36.$ | $4ab^3 = 216.$ |
| $b^3 = 27$ | $2a = 4.$ | $a^4 b^4 = 1296.$ |

| | |
|---|---|
| $a^2 + 2ab = 16.$ | $a^3 + 3a^2 b = 288.$ |
| $a^2 + b^2 = 13.$ | $3a^2b + 3ab^2 = 90.$ |
| $a^2 + b^3 = 31.$ | $3ab^2 - 3a^2b = 18.$ |
| $a^3 + b^3 = 35.$ | $4a^3b + 6a^2b^2 = 312.$ |
| $a^4 - a^3 = 8.$ | $6a^2b^2 + 4ab^3 = 432.$ |

§. 15.

Uebet euch hierinn auf eine dreyfache Weise. 1. In solchem Lesen z. E. $a + b > c - f$. a und b ist größer, als c weniger f. $a + b = c - e$. a und b ist gleich c weniger e. 2. Versuchet es nach der 2. Anm. zu lesen z. E. das obige lese ich so: die Summe von a und b, ist größer, als die Differenz von c und e. Die Summe von a und b ist gleich der Differenz von c und e. ꝛc. 3. Bemühet euch das mit den Zahlen zu machen, was da mit den Buchstaben zu machen ist. Setzet: die Buchstaben sollen das bedeuten, was ihnen da beygeschrieben ist, z. E. $ab - cd = ce - ad$. Ich multiplicire a d. i. 30 mit b d. i. 6 kommen 180 heraus. Ferner multiplicire ich c d. i. 40 mit e d. i. 4. kommen 160.

Dar-

Darnach subtrahire ich cd d. i. 160 von ab d. i. von 180. bleiben 20 übrig. Machet das, was auf der andern Seite des Zeichens = stehet, und sehet zu, ob das auch 20 ausmachet. Ich rathe nicht den zweyten Theil vorzunehmen, bis man nicht den ersten völlig verstehet.

---

# Der II. Theil.

## Von den Handlungen, durch welche man die Regel suchen muß, nach welcher man eine gewisse Größe, oder ihre Eigenschaften finden kann.

### §. 16.

Die Handlungen, durch welche man die Regel suchen muß, sind folgende, die Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio Erhöhung in die Dignität, und die Wurzel-Ausziehung. Diese Handlungen sind von den gemeinen arithmetischen Handlungen die eben diesen Namen führen, sehr unterschieden, und zwar

1. Darinn. Die gemeine Handlungen beschäfftigen sich immer mit den Größen von einerley Art, diese aber beschäfftigen sich mit Größen von verschiedenen Arten. Die gemeine Addition zeiget uns, wie wir lauter

Groschen addiren sollen, oder auch ihre Theile; die algebraische aber zeiget uns, wie wir Groschen, Häuser, ꝛc. addiren sollen. Der Titius war uns schuldig 2. Häuser 5. Dukaten, und 3. Pf. Zucker. Auf diese Schuld hat er abgetragen 2. Fäßer Wein, 2. Centner Caffee, 24. Ellen Tuch, und 200. Thaler, was bleibet er noch schuldig? Dieses subtrahiret der Algebraist.

2. Durch die Handlungen der gemeinen Rechenkunst finden wir diejenige Zahl wirklich, die wir suchen, allein durch die algebraische Handlungen finden wir anstatt der Zahl eine Regel, nach welcher wir uns richten müßen, wenn wir die verlangte Zahl finden wollen.

Ich will jezund die Handlungen vortragen, und handeln.

§. 17.

## I. Von der Addition.

Ich will in folgenden Regeln vortragen, was zu beobachten ist, wenn man addiren will.

1. Nehmet ein Glied von den summirenden Größen, welches ihr wollet, es ist gleich viel,

viel; wo ihr den Anfang machet, und sehet zu, ob es noch einmal unter den summirenden Größen wo vorkommet, oder nicht. Kommt das Glied nirgends vor; so schreibet es in die Reihe der Summe, mit dem ihm vorgesetzten Zeichen. Durch ein Glied verstehen wir alles dasjenige, was hinter einem Zeichen + oder — stehet.

2. Kommt das Glied noch einmal vor, so sehet zu, ob diese zwey Glieder einerley, oder verschiedene Zeichen haben.

3. Wenn sie einerley Zeichen haben, z. E. + und +, oder — und —, so addiret sie zusammen, und setzet die Summe von ihnen, in die Reihe der Summe mit dem Zeichen, welches vor ihnen war.

4. Wenn sie verschiedene Zeichen haben, d. i. eins hat + das andere —: so subtrahiret das kleinere von dem größeren, und was übrig bleibet setzet in die Reihe der Summe, mit dem Zeichen, welches, vor dem größeren war.

§. 18.

Anm. Wenn ein Glied mehr, als zweymal vorkömmt: so addiret erstlich die, die das Zeichen + darnach die, die das Zeichen — haben, und subtrahiret das Kleinere von dem Größeren nach der 4. Re-

gel. Ihr werdet die Regeln besser verstehen, wenn ihr die folgende Exempla mit den Regeln vergleichet.

## Beweis und Erklärung der Regeln.

Setzet d. soll bedeuten einen Dukaten, t. einen Thaler, f. einen Floren, oder einen Gulden, m. einen Mariengroschen. Setzet ferner der Titius hat einmal von euch erhalten einen Dukaten, 1. Thaler, weniger 1. Gulden, und 3. Mariengroschen. Schreibet dieses algebraisch an, was er von euch erhalten hat, nämlich so: $1d + 1t - 1f + 3m$. Oder weil es einerley ist, ob das 1. da stehet oder nicht: $d + t - f + 3m$. Eben der Titius hat ein andermal von euch erhalten 1. Thaler und 1. Gulden weniger 4. Mariengroschen. Schreibet dieses auch algebraisch an $t + f - 4 - m$. Ihr verlanget zu wissen wie viel er euch schuldig sey, nämlich, wie viel Dukaten, Gulden und Mariengr. Setzet diese summirende Größen zusammen auf folgende Weise.

| | |
|---|---|
| $d + t - f + 3m.$<br>$t + f - 4m.$<br>———————<br>$d + 2t - m$ | Es ist gekommen in die Summe d. nach der 1. Regel. 2t nach der 3. Regel, das m nach der 4. Regel: das f. ist ausgelassen nach der 4. Regel. |

Ihr

Ihr werdet sehr leicht einsehen können, daß er euch das, was die Summe aufweiset, nämlich 1. Dukaten, 2. Thal. weniger 1. Mariengr. schuldig sey. Einen Dukaten ist er euch schuldig, denn er hat einen erhalten, und keinen mehr. Ich muß ihn also nach der 1. Regel in die Summe setzen. Er ist ferner 2. Thaler schuldig, denn er hat einen vorher, und den andern nachher erhalten. Ich mußte sie also addiren. Die 3. Regel ist also richtig. Er ist mir keinen Gulden schuldig. Ihr habt ihm zwar einen gegeben, aber vorher habt ihr ihm einen Thaler weniger einen Gulden gegeben, den wir doch in die Summe gesetzt haben, als wenn ihr ihm zwey ganze Thaler gegeben hättet. Er ist euch 1. Dukaten 2. Thal. weniger einen Mariengr. schuldig. Ihr habt ihm zwar 3. Mariengr. gegeben, aber an dem Gulden, den ihr ihm zum zweytenmal gegeben habet, fehlen 4. Margr. den wir doch so berechnet haben, als wenn nichts an ihm gefehlt hätte.

§. 18.

1. Anm. Wenn euch der Titius einen Dukaten und 2. Thal. schuldig ist, so seyd ihr ihm 1. Margr. schuldig. Man kann sich also das, wovor das Zeichen + stehet, jederzeit als Schulden, vorstellen, die uns ein anderer schuldig ist, dasjenige aber, wovor das Zeichen — stehet, als Schulden, die wir einem andern schuldig sind.

§. 19.

2. Anm. Wenn man Brüche addiren soll, die einerley Zähler und Zahlen zu Nennern haben, so bringe man sie vorher unter einerley Benennung, so können sie addiret werden, Sehet das IX. Exempel.

## Einige Exempla zur Uebung.

I.
$$\begin{array}{r} a + b - c + 2d. \\ b - e + c - 4d. \\ \hline a + 2b - 2d - e. \end{array}$$

II.
$$\begin{array}{r} d + 2t - 3f + m \\ 3d - 3t + f - 3m \\ \hline 4d - t - 2f - 2m \end{array}$$

III.
$$\begin{array}{r} 3a + 5a + 6a. \\ 2a - 4a - 3a \\ \hline 9a. \end{array}$$

IV.
$$\begin{array}{r} a + ab - 3cd + 4d. \\ -3b - a + cd + 6d. \\ \hline ab - 2cd + 10d - 3b. \end{array}$$

V.
$$\begin{array}{r} a^2 + ab \\ ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

VI.
$$\begin{array}{r} a^2 + ab \\ -ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2. \end{array}$$

VII.
$$\begin{array}{r} -ab - bd + ab \\ ad + dd - ad \\ ab + bd - ab \\ \hline dd \end{array}$$

VIII.
$$\begin{array}{r} \frac{a}{2} + \frac{bc}{3} - d \\ e + \frac{a}{2} + \frac{2bc}{3} \\ \hline a + bc + e - d. \end{array}$$

41436

$$\text{IX.}\quad \frac{a}{3} + \frac{b}{4}$$

$$\frac{\ }{4} + b$$

$$\frac{7a}{12} + \frac{5b}{4}$$

§. 20.

## II. Von der Subtraction.

Ich will in folgenden Regeln vortragen, was zu beobachten ist, wenn man subtrahiren will.

1. Verändert an der Reihe, die ihr subtrahiren wollet, die Zeichen. Das ist: setzet da — wo + stehet, und setzet + wo — stehet.

2. Addiret diese zwey Reihen zusammen, wie wir bey der Addition gesehen haben. Die Summe davon, ist die Differenz. Ihr sollet z. E. von $a + b - 3c + 5d - 4e$ subtrahiren $3a - 4b + 2c - 2d + 4e$. Machet es also:

$$\begin{array}{r} a + b - 3c + 5d - 4e \\ -3a + 4b - 2c + 2d + 4e. \\ \hline + \quad -2a + 5b - 5c + 7d - 8e. \end{array}$$

Beweis. Setzet daß der Titius $d + 2t - m$ von euch erhalten hat (Sehet dieses Exemplum bey der Addition). Setzet ferner, er hätte darauf abgetragen $t + f - 4m$, ihr verlanget zu wissen wie viel er noch schuldig sey. Bildet euch ein: er hätte die Summe $d + 2t - m$ von euch nicht erhalten, ihr hättet aber $t + f - 4m$ von ihm erhalten, so ist es offenbar, daß ihr ihm schuldig seyd $d + 2t$, und er ist euch schuldig $4m$. Weil man aber das, was ihr schuldig seyd, mit $-$, das aber, was euch ein anderer schuldig ist, mit $+$ schreiben muß nach §. 18. so ist es offenbar, daß ihr es so schreiben und zusammen addiren müßet $- t - f + 4m$ wenn ihr wissen wollet, was er noch schuldig ist.

§. 21.

1. Anm. Wenn man Brüche subtrahiren soll, die einerley Zähler und Nenner; oder Zahlen zu Nennern haben; so bringet sie erstlich unter einerley Benennung, wie das VII. Exempel weiset.

§. 22.

Mehrere Exempel zur Uebung. Ihr werdet sie bey der Addition finden. Setzet, von einer jeden Sum-

Summe soll die erste summirende Reihe subtrahiret werden. Sehet das I. II. III. IV. V. VI. VII. Exemplum bey der Addition.

I. $a + 2b - 2d - e$
$-a - b + c - 2d$
$b + 4d - e + c$

II. $4d - t - 2f - 2m$
$-d - 2t + 3f - m$
$3d - 3t + f - 3m$

III. $9a$
$-3a - 5a - 6a$
$-5a$

IV. $ab - 2cd + 10d - 3b$
$-a - ab + 3cd - 4d$
$cd + 6d - 3b - a$

V. $a^2 + 2ab + b^2$
$-a^2 - ab$
$ab + b^2.$

VI. $a^2 - b^2$
$-a^2 - ab$
$-b^2 - ab.$

VII. $\frac{7a}{2} + \frac{5b}{4}$
$-\frac{2}{3} - \frac{b}{4}$
$\frac{a}{4} + b$

§. 23.

## III. Von der Multiplication.

Ich will, was bey dem Multipliciren zu beobachten ist, in folgenden Regeln vortragen.

1. Setzet nur die Factores, die ihr multipliciren sollet neben einander, z. E. es soll a und b multipliciret werden mit c, und a b c soll multipliciret werden mit d e. Machet es also.

| | | |
|---|---|---|
| a + b | | a b c |
| c | | d e |
| ac. + bc. | | ae. be. ce. |
| | | da. db. dc. |

Anm. Es ist gar nichts daran gelegen, was ihr vor einen Factorem voran schreibet, es ist auch einerley, ob ihr das Factum aus a und c a c, oder c a setzet.

2. Setzet vor das Product das Zeichen +, wenn alle beyde Factores einerley, — aber, wenn sie verschiedene Zeichen gehabt haben. Z. E.

| | |
|---|---|
| a — b | 5 — 4 |
| c | 3 — 1 |
| ac — bc | 15 — 12 |
| | — 5 + 4 |

Beweis. Setzet, ihr habet 5. Taglöhner weniger 4. ihr sollet ihnen zu 3. gr. weniger 1. bezahlen, ihr verlanget zu wissen, wie

viel

viel man ihnen bezahlen muß. Hättet ihr 5. Tagl. gehabt, und jedem zu 3. gr. bezahlet, so ist bekannt, ihr hättet 15. gr. bezahlen müßen. In eurem Product stehet 15. da ihr doch keine 5. sondern nur 5. weniger 4. gehabt habt: so ist leicht einzusehen, daß ihr jetzund untersuchen müßet, was ihr für die 4, die fehlen, angerechnet habet, und davon subtrahiren. Das geschieht, wenn man 3 mit 4. multipliciret, und vor das Product — setzet, um anzuzeigen, daß dieses subtrahiret werden müße. So erhaltet ihr — 12. Ferner ihr habt 15. gr. herausgebracht zu 3. gr. da doch einer nur 3. weniger 1. bekömmt: so ist leicht einzusehen, daß ihr 5 mit 1. multipliciren, und das Product von 15. subtrahiren müßet. Setzet also — 5. Da aber nicht 5 sondern nur 5 weniger 4. zu 3. gr. erhalten haben; so habet ihr vor die 4. umsonst gerechnet und abgezogen. Ihr müßet also aufs neue, die 4. mit 1. multipliciren, und mit dem Zeichen + anzeigen, daß ihr dieses noch bezahlen müßet.

§. 24.

1. Anm. Sollten sich vor den Factoribus Zahlen befinden, so müßen diese auch multipliciren, und das Product dem Product vorausgesetzt werden. Z. E.

$$\begin{array}{r} 3a + 2b \\ 4c \\ \hline 12ac + 8bc \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5a - 3b \\ -2c \\ \hline -10ac + 6bc \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5a + 3b - 2c \\ d \\ \hline 5ad + 3bd - 2dc. \end{array}$$

§. 25.

2. Anm. Bestehen alle beyde Factores aus mehreren als aus einem Gliede, so werden die Producta, die herauskommen, addiret. Z. E.

$$\begin{array}{r} 2a - 3c \\ 4c - 3a \\ \hline -6a^2 + 9ac \\ 8ac - 12c^2 \\ \hline 17ac - 6a^2 - 12c^2 \end{array}$$

§. 26.

3. Anm. Sollten die Brüche multipliciret werden, so multipliciret die Zählers mit sich selbst, das Product wird den Zähler des Producti ausmachen; multipliciret ferner die Nenner, das Product davon wird den Nenner des Producti ausmachen.

Z. E. Es soll multipliciret werden $\frac{a}{b}$ mit $\frac{c}{d}$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

## §. 27.

4. Anm. Wenn ein Bruch mit einer ganzen Größe multipliciret werden soll: so multipliciret nur den Zähler, wie es in Brüchen üblich ist. Es soll z. E. $\frac{a}{b}$ multipliciret werden mit c, machet es also

$$\frac{a}{b},\ c = \frac{ac}{b}.$$

## §. 28.

### Einige Exempla.

| I. | II. |
|---|---|
| $a + b$ | $a - b$ |
| $a + b$ | $a - b$ |
| $ab + b^2$ | $-ab + b^2$ |
| $a^2 + ab$ | $a^2 - ab$ |
| $a^2 + 2ab + b^2$ | $a^2 - 2ab + b^2$ |

| III. | IV. |
|---|---|
| $x + 1$ | $x - 1$ |
| $x + 1$ | $x - 1$ |
| $x + 1$ | $-x + 1$ |
| $x^2 + x$ | $x^2 - x$ |
| $x^2 + 2x + 1.$ | $x^2 - 2x + 1$ |

| V. | VI. | VII. | VIII. |
|---|---|---|---|
| $a + b$ | $a - b$ | $a + 1$ | $a - 1$ |
| $x$ | $x$ | $x$ | $x$ |
| $ax + bx$ | $ax - bx$ | $ax + x$ | $ax - x$ |

| | |
|---|---|
| IX. $x + \frac{a}{2}$ | X. $x - \frac{a}{2}$ |
| $x + \frac{a}{2}$ | $x - \frac{a}{2}$ |
| $\frac{ax}{2} + \frac{a^2}{4}$ | $-\frac{ax}{2} + \frac{a^2}{4}$ |
| $x^2 + \frac{ax}{2}$ | $x^2 - \frac{ax}{2}$ |
| $x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$ | $x^2 - ax + \frac{a^2}{4}$ |
| XI. $x + \frac{1}{2}$ | XII. $x - \frac{1}{2}$ |
| $x + \frac{1}{2}$ | $x - \frac{1}{2}$ |
| $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ | $-\frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ |
| $x^2 + \frac{x}{2}$ | $x^2 - \frac{x}{2}$ |
| $x^2 + x + \frac{1}{4}$ | $x^2 - x + \frac{1}{4}$ |

§. 29.

§. 29.

# IV. Von der Division.

Wie man dividiren soll, will ich in folgenden Regeln zeigen.

I. Wenn der Divisor nur aus einem Gliede bestehet, verfahret also.

1. Sehet zu, ob der Divisor unter den Buchstaben des Gliedes, welches ihr dividiren wollet, zu finden sey oder nicht. Ist er da zu finden, so sind die übrigen Theile des Gliedes Quotient; ist er aber da nicht zu finden, machet einen Bruch. Z. E. a b c xd soll dividiret werden mit a, so ist der Quotient $bc\frac{xd}{a}$.

2. Setzet dem Quotienten das Zeichen + vor, wenn das Divisum mit dem Divisore einerley, — aber wenn sie verschiedene Zeichen gehabt haben. Z. E. Ihr wolltet dividiren ab + ac — ad — x mit a. verfahret also.

$$\frac{ab + ac - ad - x}{a} \Big| \; b + c - d - \frac{x}{a}$$

3. Sobald als ihr den Quotienten gefunden habet, multipliciret ihn mit dem Divisore, und subtrahiret das Product von dem Dividendo, und dividiret das übrige wiederum, z. E.

$$\begin{array}{l|l} abc - abd & c - d \\ ab & \\ -abc & \\ \hline \quad abd & \\ -abd & \\ \quad ab & \\ +abd & \\ \hline \quad o. & \end{array}$$

§. 30.

II. Wenn der Divisor aus mehreren Gliedern bestehet, z. E. Ihr wolltet dividiren $a^2 + 2ab + b^2$ mit $a + b$. So nehmet nur das erste Glied des Divisoris z. E. nur a, und sehet zu, ob es in einem von den Gliedern des Dividendi zu finden sey oder nicht. Multipliciret ferner den ganzen Divisorem mit dem gefundenen Quotienten, und das Product subtrahiret von dem Diviso. Z. E. Dividiret den Rest wiederum nach der vorhergehenden Art, wenn welcher übrig geblieben war. Ist der Divisor in dem Dividendo nicht zu finden: so

$$\begin{array}{l|l} a^2 + ab & a. \\ a + b & \\ -a^2 - ab & \\ \hline \quad o & \end{array}$$

so machet man einen Bruch. Z. E. Es sey Dividendum $a^2 + 3ab$ Der Divisor aber $cd - e$. Setzet es so

$$\frac{a^2 + 3ab}{cd - e}.$$

§. 31.

1. Anm. Sind vor dem Dividendo, und dem Divisore Zahlen zu finden, so muß man diese auch dividiren, z. E.

$$\frac{10ac}{5a} \Big| \; 2c \qquad \frac{3ac}{2a} \Big| \; \frac{3c}{2}$$

§. 32.

2. Anm. Wenn ein Bruch dividirt werden soll, so verfahret wie in der Rechenkunst üblich ist. Es soll z. E. $\frac{a}{b}$ dividiret werden mit c, machet es so $\frac{a}{bc}$.

Es soll dividiret werden $\frac{a}{b}$ mit $\frac{b}{d}$ der Quotient ist $\frac{ad}{bc}$.

§. 33.

Ich will dieses mit folgenden Exemplis erläutern, die aus der Multiplication hergenommen sind. Das Dividendum ist das Product, welches wir da herausgebracht haben, der Divisor aber ist einer von den Factoribus.

I. Divide $a^2+2ab+b^2$ by $a+b$:

$$\begin{array}{r|l} a^2+2ab+b^2 & a+b \\ a+b & \\ -a^2-ab & \\ \hline ab+b^2 & \\ a+b & \\ -ab-b^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

II. Divide $a^2-2ab+b^2$ by $a-b$:

$$\begin{array}{r|l} a^2-2ab+b^2 & a-b \\ a-b & \\ -a^2+ab & \\ \hline -ab+b^2 & \\ a-b & \\ +ab-b^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

III. Divide $x^2+2x+1$ by $x+1$:

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x+1 & x+1 \\ x+1 & \\ -x^2-x & \\ \hline x+1 & \\ x+1 & \\ -x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

IV. Divide $x^2-2x+1$ by $x-1$:

$$\begin{array}{r|l} x^2-2x+1 & x-1 \\ x-1 & \\ -x^2+x & \\ \hline -x+1 & \\ x-1 & \\ -x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{V.}\quad \begin{array}{r|l} ax + bx & a + b \\ x & \\ -ax & \\ \hline bx & \\ x & \\ -bx & \\ \hline o & \end{array} \qquad \text{VI.}\quad \begin{array}{r|l} ax - bx & a - b \\ x & \\ -ax & \\ \hline -bx & \\ x & \\ +bx & \\ \hline o & \end{array}$$

$$\text{VII.}\quad \begin{array}{r|l} ax + x & a + 1 \\ x & \\ -ax & \\ \hline x & \\ x & \\ -x & \\ \hline o & \end{array}$$

## V. Von der Wurzel Erhöhung in eine verlangte Dignität.

§. 34.

**Eine binomische Wurzel kann in die verlangte Dignität erhöhet werden.**

I. Durch die Multiplication. Multipliciret nämlich die binomische Wurzel mit sich selbst, so ist das Product das Quadrat davon. So sind alle die Größen bey der

Mul-

Multiplication in die Quadrate erhoben worden, welche mit sich selbst multipliciret waren. Multipliciret das Quadrat mit der Wurzel noch einmal, so findet ihr den Cubus ꝛc. Z. E.

$$
\begin{array}{r}
a + b \\
a + b \\
\hline
ab + b^2 \\
a^2 + ab \quad \\
\hline
\text{Quadr. } a^2 + 2ab + b^2 \\
a + b \\
\hline
a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
a^3 + 2a^2b + ab^2 \quad \quad \\
\hline
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{array}
$$

## §. 35.

II. Durch einen kürzeren Weg. Ihr wolltet das a + b in eine Dignität erhöhen.

1. Schreibet das a zu der linken, das b aber zu der rechten Hand, und a b so vielmal darzwischen, als der Exponent der Dignität Einer in sich hält weniger 1. Z. E. Ihr wolltet das a + b in die dritte Dignität erhöhen, setzet es also a ab ab b.

Setzet

2. Setzet den Exponenten der Dignität über das erste Glied nämlich a, über das a in dem zweyten Gliede weniger 1, in dem dritten Glied wiederum 1 weniger 2c. Z. E. $a^3$ + $a^2b$ ab b

3. Alle diese Exponenten setzet auch über das b, aber rückwärts z. E. $a^3$ $a^2b^1$ $a^1b^2$ $b^3$.

Anm. Es ist nicht nöthig das 1. zu schreiben, dahero schreibe ich es so

$a^3$ $a^2b$ $ab^2$ $b^3$.

4. Nehmet die Exponenten von dem a, und die Exponenten von dem b setzet darunter. Z. E.

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 3 |

5. Dividiret das erste Glied der obersten Reihe 3 durch das erste Glied der untersten Reihe 1 und setzet den Quotienten 3 vor das zweyte Glied von der rechten und der linken Hand. Z. E.

$a^3$ $3a^2b$ $3ab^2$ $b^3$.

Anm. Sollte die Dignität aus mehreren Gliedern bestehen, so dividiret das Product der zwey ersten Zahlen aus der obersten Reihe, durch das Product der zwey ersten Zahlen aus der untersten Reihe, und setzet den Quotienten vor das dritte Glied von der rechten und der linken Hand 2c.

6. Setzet

6. Setzet vor ein jedes von diesen Gliedern +, wenn das a und b + Zeichen gehabt haben. Z. E.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Hätten sie verschiedene Zeichen gehabt z. E. a — b oder — a + b. so setzet das + und — wechselsweise.

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Von der Richtigkeit, und den sehr großen Vortheilen dieser Methode werdet ihr euch überzeugen, wenn ihr das a + b in eine gewisse Dignität durch die Multiplication, und nach dieser Methode erhöhet. Ich will diese Regel noch mit diesem Exempel erläutern, und die Zahlen der Regel hinzusetzen, nach welcher ein jedes gemacht worden ist. Es soll das a + b in die fünfte Dignität erhöhet werden.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | a | ab | ab | ab | ab | b | | |
| 2. | $a^5$ | $a^4b$ | $a^3b$ | $a^2b$ | ab | b | | |
| 3. | $a^5$ | $a^4b$ | $a^3b^2$ | $a^2b^3$ | $ab^4$ | $b^5$ | | |
| 4. | 5 4 3 2 1<br>1 2 3 4 5 | | | | | $\frac{5}{1}$ | 5 | $\frac{20}{2}$ | 10 |
| 5. | $a^5$ | $5a^4b$ | $10a^3b^2$ | $10a^2b^3$ | $5ab^4$ | $b^5$ | | |
| 6. | $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ | | | | | | | |

# VI. Von der Ausziehung einer verlangten Wurzel.

§. 36.

Solltet ihr aus einer gegebenen Zahl ein Wurzel ausziehen: so habet ihr zweyerley zu thun.

I. Müßet ihr die Zahl darzu vorbereiten, und euch mit einem Hülfsmittel versehen. Dieses erfordert folgende Arbeiten.

1. Man muß das a + b in die Dignität erhöhen, welche Dignität unsere Zahl vorstellet, aus welcher wir die verlangte Wurzel ausziehen wollen. Wollen wir z. E. die quadratische Wurzel ausziehen, so müßen wir aus dem a + b ein Quadrat machen. Wollen wir die Cubische Wurzel ausziehen, so müßen wir das a + b in den Cubum erhöhen. 2c.

2. Man muß sich das gefundene Quadrat, oder den Cubum 2c. von a + b da aufsetzen, wo man es immer vor den Augen haben kann.

3. Man muß die gegebene Zahl von der rechten zu der linken Hand in gewisse Glieder theilen, und einem jeden Gliede so viele

Zah-

Zahlen geben, als der Name der Wurzel, die man ausziehen will, Einheiten besitzet. Z. E. Wollen wir also die Quadratische Wurzel ausziehen, so muß man zwey Zahlen einem Gliede geben. Wollen wir die Cubische Wurzel ausziehen, so muß man einem Gliede drey Zahlen zueignen, und so weiter.

Anm. In dem letzten Gliede zu der linken Hand können wohl auch wenigere stehen.

II. **Müßet ihr nun die verlangte Wurzel suchen.** Diese Arbeit läßt sich füglich in zwey Arbeiten theilen, nämlich, in die Ausziehung der Wurzel aus dem ersten Gliede zu der linken Hand, und die Ausziehung der Wurzel aus den folgenden Gliedern. Ich will zeigen.

1. Wie man die Ausziehung der Wurzel aus dem ersten Gliede verrichten soll. Hier ist folgendes zu beobachten.

1.) Man muß durch das bloße Versuchen suchen, welche die Wurzel davon seyn möchte. Wenn das erste Glied keine vollkommene verlangte Dignität ist, so nehmet die Wurzel von der nächst kleineren Dignität, die dieser am nächsten zukömmt.

2.) Se-

2.) Setzet diese Wurzel an den Ort, welchen ihr zur Aufschreibung der Wurzeln bestimmet habet.

3.) Nennet diese Wurzel a, und setzet auch diesen Buchstaben darüber um es desto leichter behalten zu können.

4.) Erhöhet die gefundene Wurzel, die ihr nun a nennet, in die Dignität.

5.) Setzet diese gefundene Dignität unter das erste Glied, und zwar so, daß die erste Zahl von der rechten Hand unter die erste, die zweyte unter die zweyte, 2c. zu stehen komme.

6.) Ziehet diese Dignität von dem ersten Gliede ab, und schreibet den Rest darunter, wie in der Subtraction üblich ist.

Dieses ist zu beobachten, wenn man aus dem ersten Gliede die Wurzel ausziehen will. Nun will ich zeigen

2. Wie man die Ausziehung der Wurzel aus dem zweyten Gliede verrichten soll. Hier ist folgendes zu beobachten.

1.) Man muß den Divisorem suchen, durch welchen man dividiren muß, um die zweyte Wurzel oder um die Wurzel aus dem zweyten Gliede zu finden. Diesen finden wir, wenn wir das zweyte Glied in der Dignität von a + b ansehen, das b davon abschneiden, und das mit der gefundenen Wurzel, die wir a nannten, machen, was da mit dem a gemacht worden ist, dieses ist der Divisor.

2.) Man muß den gefundenen Divisorem so setzen, daß die letzte Zahl von dem Divisore unter die erste des zweyten Gliedes, und die übrigen unter den vorhergehenden Rest zu stehen kommen.

3.) Dividiret nun, und setzet den gefundenen Quotienten hinter die erste gefundene Wurzel, und nennet diesen Quotienten b, dieser ist die Wurzel aus dem zweyten Gliede.

4.) Sehet nun das zweyte Glied in der Dignität von a + b an, und machet alles dieses mit den gefundenen Wurzeln, die ihr a und b benennet habt, was mit dem a und b in dem zweyten Gliede gemacht worden ist. Setzet dieses Product so, daß die letzte Zahl von demselben unter die erste des zweyten Gliedes zu stehen komme, und die übrigen

un-

unter den vorherstehenden Rest. Sehet ferner das dritte Glied in der Dignität von a + b, und machet wiederum alles dieses mit den gefundenen Wurzeln, die ihr a und b benennet habt, was mit dem a und b oder nur mit dem b in dem dritten Gliede gemacht worden ist. Setzet dieses Product so, daß die letzte Zahl von demselben unter die zweyte Zahl des zweyten Gliedes, und die übrigen unter die vorhergehenden zu stehen kommen. Sehet nun auch das vierte Glied, wenn es noch hat, und machet es wiederum so.

5.) Addiret alle diese Producte zusammen.

6.) Ziehet diese gefundene Summe von dem zweyten Gliede und dem vorhergehenden Rest ab.

Wenn die gegebene Zahl, aus welcher wir die Wurzel ausziehen sollten, nur aus zwey Gliedern bestünde, und ist eine vollständige Dignität, so wird nach dieser Subtraction gar nichts übrig bleiben.

3.) Wie man die Ausziehung der Wurzel aus dem dritten Gliede verrichten soll.

Wenn die Wurzeln aus dem ersten und zweyten Gliede ausgezogen sind, so nennet nun diese zwey Wurzeln a, und stellet euch vor, daß das dritte Glied das zweyte sey, nun machet alles, wie ihr in dem nächst vorhergehenden Numero unterrichtet worden seyd. Die Wurzel, die ihr aus dem dritten Gliede findet, nennet wiederum b.

Bestehet die Zahl aus vier Gliedern, so nennt die drey aus den ersten drey Gliedern ausgezogenen Wurzeln wiederum a, und suchet nachhero die Wurzel in dem vierten Gliede wie in dem zweyten, und nennet die neue Wurzel wiederum b.

Ich will diese Regeln mit folgenden Beyspielen zu erläutern suchen. Es soll aus der Zahl 576 und 1024 die Quadratische Wurzel ausgezogen werden.

$a^2 + 2a \mid b + b^2$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a^2 =$ 5 | 76 | ab | |
| 4 | | 24 | |
| 1 | 76 | | |
| 2a= | 4 | | |
| 2ab= 1 | 6 | | |
| $b^2 =$ | 16 | | |
| $2ab + b^2 = 176$ | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | ab |
| $a^2$ | 10 | 24 | 32 |
| | 9 | | |
| | 1 | 24 | |
| 2a | | (6) | |
| 2ab | 1 | 2 | |
| $b^2$ | | 4 | |
| $2ab + b^2 =$ | 1 | 2 4 | |

Es sollen noch aus den Zahlen 186624 und 65536 die Quadratische Wurzeln ausgezogen werden.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | ab |
| $a^2$ | 18 | 66 | 24 | 43 |
| | 16 | | | |
| | | | | ab |
| | 2 | 66 | | 432 |
| 2a | | (8) | | |
| 2ab | 2 | 4 | | |
| $b^2$ | | 9 | | |
| | 2 | 49 | | |
| | 17 | 24 | | |
| 2a | (8 | 6) | | |
| 2ab | 17 | 2 | | |
| $b^2$ | | 4 | | |
| | 17 | 24 | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | ab |
| $a^2$ | 6 | 55 | 36 | 25 |
| | 4 | | | ab |
| | 2 | 55 | | 256 |
| 2a | | (4) | | |
| | 2 | 0 | | |
| $b^2$ | | 25 | | |
| | 2 | 25 | | |
| | | 30 | 36 | |
| 2a | | 5 | 0 | |
| 2ab | | 30 | 0 | |
| $b^2$ | | | 36 | |
| | | 3 0 | 3 6 | |

Es soll noch aus der Zahl 6943225 die Quadratische Wurzel ausgezogen werden.

$a^2 + 2a \mid b + b^2$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | a b |
| | 6 | 9 4 | 3 2 | 2 5 | 2 6 |
| $a^2$ | 4 | | | | a b |
| | 2 | 9 4 | | | 2 6 3 |
| 2a | . | (4) | | | |
| 2ab | 2 | 4 | | | |
| $b^2$ | | 3 6 | | | a b |
| | 2 | 7. 6 | | | 2635 |
| | | 18 | 3 2 | | |
| 2a | | (5 | 2) | | |
| 2ab | | 15 | 6 | | |
| $b^2$ | | | 9 | | |
| | | 15. | 6. 9 | | |
| | | 2 | 6 3 | 25 | |
| 2a | | | (5 2 | 6) | |
| 2ab | | 2 | 6 3 | 0 | |
| $b^2$ | | | | 25 | |
| | | 2 | 6 3 | 2 5 | |

Man kann diese Art die Quadratische Wurzel auszuziehen ein wenig veränderen des bequemeren Gebrauchs wegen. Machet es also:

1. Suchet aus dem ersten Gliede die Wurzel durch Versuchen, wie es gezeigt worden ist.

2. Erhöhet die gefundene Wurzel in ein Quadrat, und subtrahiret es aus dem ersten Gliede.

3. Suchet den Divisorem, mit dem man theilen muß, wenn man die zweyte Wurzel finden will.

4. Setzet die gefundne zweyte Wurzel zu dem Divisore von der rechten Hand, und stellet euch vor, als wenn dieses der Divisor gewesen wäre.

5. Multipliciret nun den Divisorem mit der gefundenen Wurzel, und subtrahiret das Product von dem Diviso.

§. 37.

Es soll aus der Zahl 110592 die Cubische Wurzel ausgezogen werden.

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | a b |
| | ~~110~~ | 592 | 48 |
| $a^3$ | .~~6~~.4 | | |
| | 46 | 592 | |
| $3a^2$ | (4 | 8) | |
| $3a^2b$ | 38 | 4 | |
| $3ab^2$ | 7 | 68 | |
| $b^3$ | | 512 | |
| | 46 | 592 | |

Es soll noch aus der Zahl 14427662875. die Cubische Wurtzel ausgezogen werden.

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | a b |
| 14 | 4 3 7 | 6 6 2 | 8 7 5 | 2 4 |
| $a^3$ = 8 | | | | |
| n. divid. 6 | 4 3 7 | | | a b |
| $3a^2$ = (1 | 2) divis. | | | 2 4 4 |
| $3a^2b$ = 4 | 8 | | | a b |
| $3ab^2$ = | 9 6 | | | 2 4 3 5 |
| $b^3$ = | 6 4 | | | |
| Subtrah. 5 | 8 2 4 | | | |
| n. dividend. | 6 1 3 | 6 6 2 | | |
| $3a^2$ | (1 7 2 | 8) divis. | | |
| $3a^2b$ | 5 1 8 | 4 ~~divisor~~ | | |
| $3ab^2$ | 6 | 4 8. | | |
| $b^3$ | | 2 7 | | |
| Subtrah. | 5. 2. 4. | 9 0. 7 | | |
| n. dividend | 8 8 | 7 5 5 | 8 7 5 | |
| $3a^2$ divis. | (1 7 | 7 1 4 | 7) | |
| $3a^2b$ | 8 8 | 5 7 3 | 5 | |
| $3ab^2$ | | 1 8 2 | 2 5 | |
| $b^3$ | | | 1 2 5 | |
| | 8 8 | 7 5 5 | 8 7 5 | |

## §. 38.

Anm. 1. Aus einer jeden Zahl läßt sich nicht eine vollständige Wurzel ausziehen. Z. E. Aus der Zahl 7. läßt sich keine Quadratische Wurzel vollständig ausziehen. Wenn euch eine solche Zahl gegeben wird, so hänget der Zahl so viele Glieder, die aus bloßen Nullen bestehen sollen, als euch beliebet an. Gebet einem Gliede so viele Nullen, als der Name der Wurtzel Einheiten enthalt. Z. E. Ich sollte aus der Zahl 7. die Quadratische Wurzel ausziehen, ich will, um die Wurzel so genau als ich es nöthig habe zu erhalten, einige Glieder von lauter Nullen anhängen.

$$a^2 + 2ab + b^2$$

```
                                  | a b
          7 | 0 0 | 0 0           | 2 6
    a²    4 |     |               |
    ------- | --- |               | a b
          3 | 0 0 |               | -----
    2a      |(4)  |               | 2 6 4
            | --- |               |
    2ab   2 | 4   |               |
     b²       3 6 |               |
    -----------   |               |
          2. 7. 6 |               |
    ------------- | -----         |
            2 4   | 0 0           |
    2a       (5   | 2)            |
                  | -----         |
    2ab     2 0   | 8             |
     b²           | 1 6           |
          ------- | -----         |
           2 0.   | 9. 6          |
          ------- | -----         |
            3     | 0 4           |
```

§. 39.

Die Wurzel, die man aus dem ersten Gliede, in dem sich die Nullen befinden, erhält, z. E. hier ist 6. bedeutet Zehentheilchen. Diejenige aber die man aus dem zweyten Gliede der Nullen erhält, z. E. hier ist 4. bedeutet Hunderttheilchen ꝛc.

§. 40.

2. Wenn man aus einem Bruch die Wurzel ausziehen will, so muß man bisweilen den Bruch in Ganze verwandeln, wenn er sich verwandeln läßt. Es soll z. E. aus $\frac{48}{3}$ die Quadratische Wurzel ausgezogen werden. Aus diesen läßt sich die Wurzel nicht anders, als wenn ich diesen Bruch aufhebe, finden, und ist 4. Bisweilen muß man den Bruch behalten, und erstlich aus dem Zähler, nachhero aber aus dem Nenner die Wurzel ziehen, und aus den Wurzeln wiederum einen Bruch machen. Es soll z. E. aus diesem Bruh $\frac{9}{16}$ die Quadratische Wurzel ausgezogen werden, die Wurzel wird $\frac{3}{4}$ seyn. Bisweilen muß man den Bruch in einen größern, oder kleineren verwandeln. Es soll z. E. aus diesem Bruch $\frac{8}{18}$ die Quadratische Wurzel ausgezogen werden, ich multiplicire theils den Zähler theils den Nenner mit 2. kommet $\frac{16}{36}$. Die Wurzel hieraus ist $\frac{4}{6}$ oder $\frac{2}{3}$. Man kann ihn aber auch mit 2. dividiren, kommt heraus $\frac{4}{9}$ woraus die Wurzel wiederum $\frac{2}{3}$ ist.

# Der III. Theil.

## Von den besonderen Handlungen, die man vorzunehmen hat um die Regel ausfindig zu machen, nach welcher man die Größe, oder nur ihre Eigenschaften suchen muß, derer einige Eigenschaften uns gegeben worden sind.

### §. 41.

Wollen wir die Regel finden, nach welcher wir die unbekannte Größe, oder ihre Eigenschaften suchen müßen: so müßen wir folgende Handlungen vornehmen.

I. Die Benennung. Benennet nämlich die unbekannte Größe mit einem von den letzten Buchstaben des Alphabets x, oder y, oder z. Die bekannten aber mit den ersten Buchstaben, wie uns schon der I. Theil solches gewiesen hat.

Anm. Wenn nur eine unbekannte Größe vorkommen wird, die wollen wir immer mit x. bezeichnen, sollen aber zwey unbekannte vorkommen, und eine ist größer, als die andere, so soll x die größere, y aber die kleinere bedeuten.

§. 42.

II. Eine Gleichung. Wir müßen nachdenken, was der unbekannten Größe ganz allein, oder, indem sie mit anderen bekannten Größen vermischet ist, gleich sey. Dieses muß man aufsetzen, und mit den algebraischen Zeichen gehörig bezeichnen. Dieser Aufsatz wird eine Gleichung, Aequatio genannt, wenn in demselben das Zeichen der Gleichheit vorkömmt.

Z. E. Ich will eine Zahl, der folgende Eigenschaften zukommen, wissen: wenn ich der Zahl 8 addire, so soll das heraus kommen, was herauskömmt, wenn ich von 10 die unbekannte Zahl subtrahire. Benennet sie: $x$ ist die unbekannte Zahl, wenn man ihr 8 addiret, kommet $x + 8$ heraus, wenn man sie von 10 subtrahiret, kommet $10 - x$ heraus. Machet nun eine Gleichung. Vermöge dessen, was gesagt ist, ist $x + 8$ gleich dem $10 - x$. Setzet es also folgender Maßen $x + 8 = 10 - x$. Dieses wird eine Gleichung genannt.

§. 43.

Anm. 1. Die Aufgaben werden abgetheilt in die allgemeine und in die besondere. Jene sind, in welcher die Eigenschaften der unbekannten Größe ausdrücklich angegeben werden, ob nämlich zu der Größe etwas addiret, oder von derselben etwas subtrahiret rc. werden soll. Zum Beyspiel dient die nächst

vor-

vorhergehende Aufgabe. Diese aber sind, in welcher die Eigenschaften der unbekannten Grösse, ob man ihr nämlich etwas addiren, oder multipliciren ꝛc. soll, nicht ausdrücklich angegeben werden. Z. E. Sempronius hatte von seinen 100=$b$ Rthl. so viele dem Titius, der vorhero nur 20=$a$ hatte, gegeben, daß sie nun jetzund alle beyde gleich viel haben. Nun ist die Frage, wie viel hat der Sempronius dem Titius gegeben. Diese ist eine besondere Aufgabe, hier wird von der Grösse x, die der Sempronius dem Titius gegeben hat, gar nichts ausdrücklich gesagt, ob man ihr nämlich etwas addiren, oder von ihr etwas subtrahiren soll ꝛc. Dieses ist eben, was die Algebram den Anfängern so schwer, mühsam und verdrüßlich machet. Denn es können gar keine Regeln angegeben werden, nach welchen man sich richten soll, wenn man sich die Eigenschaften bekannt machen will, ohne welche sich doch keine Gleichung machen läßt. Man muß sie also durch bloßes Nachdenken entdecken, wozu sich einer besser, als der andere schicket. Dieses ist es aber auch, wodurch sich die Algebraisten die Vollkommenheiten des Witzes, der Aufmerksamkeit, der Geduld, der Scharfsinnigkeit und der Vernunft erwerben, die sie sich sonst nimmermehr erworben hätten, und wodurch sie sich von dem Hauffen der Gelehrten unterscheiden. Denn, je schwerer diese Aufgaben sind, je öfters man sich darinnen übet, und je jünger das Alter dessen ist, der sich darinn übet, desto höhere Stufen des Witzes, der Scharfsinnigkeit, der Aufmerksamkeit, der Geduld, und des Verstandes kann derselbe ersteigen.

## §. 44.

2. Anm. Es ist nicht nöthig immer eine Gleichung zu machen, besonders wenn man sich nur um die Eigenschaften einer Grösse bekümmert. Unten

ten werden genug Beyspiele von dergleichen vorkommen, die uns in den Stand setzen werden, daß wir dieses nicht nur besser verstehen, sondern auch eine Fertigkeit erhalten werden, diesen Regeln Genüge zu leisten.

§. 45.

III. Die Reduction. Man muß machen, daß auf einer Seite in der Gleichung des Zeichens = nur die bekannte Größen, auf der anderen aber die unbekannte, nämlich das x ganz allein zu stehen kommen, und zwar auf der Seite, auf welcher es das Zeichen + behält. Diese Arbeit heisset die Reduction. Weil sich aber in einer Gleichung nur eine, oder mehrere unbekannte Größen befinden können; so wollen wir untersuchen erstlich, wie die unbekannte Größe, die sich ganz allein in einer Gleichung befindet, von den bekannten abgesondert werden muß; zweytens wie man die unbekannten Größen, wenn sich mehrere in einer Gleichung befinden, von den bekannten absondern soll. Ich will davon in zwey Abschnitten handeln.

# Der I. Abschnitt.

## Von der Reduction einer Gleichung, in der sich nur eine unbekannte Größe befindet.

§. 46.

Wenn sich in einer Gleichung nur eine einzige unbekannte Größe befindet, so versetzet alles dasjenige, welches bekannt ist, und auf der Seite des Zeichens = zu finden ist, auf welcher das x stehet, auf die andere Seite. Dieses ist, was ich jetzund zeigen will, wenn ich vorhero folgende vier Anmerkungen angeführet habe.

§. 47.

Die 1. Anm. Oft ist das x auf beyden Seiten des Zeichens = zu finden, man muß es also erstlich auf eine Seite bringen, und sich nach eben denjenigen Regeln bey desselben Versetzung richten, nach welchen man sich bey Versetzung der bekannten Größen richtet, die bald vorgetragen werden sollen.

§. 48.

Die 2. Anm. So oft, als sich einige Glieder in der Gleichung abkürzen lassen, muß man sie abkürzen, das ist, kommen einige Glieder vor, die man addiren soll, und kann, so muß man sie addiren. Z. E.

$$x + a + 3a + 4x = b + 3c + 4c$$

$$5x + 4a = b + 7c$$

Kom-

Kommen einige Glieder vor, die man subtrahiren soll, und kann, so muß man sie subtrahiren. Z. E.

$$x - 4a + 5a - 3x = 3b + c - c - 2b$$

$$a - 2x = b.$$

Kommen einige Glieder vor, die man multipliciren soll, und kann, so muß man sie multipliciren. Z. E.

$$(a + b - c)\,(x) = b + c$$

$$ax + bx - cx = b + c$$

Kommen einige Glieder vor, die man dividiren soll, und kann, so muß man sie dividiren. Z. E.

$$\frac{xa}{a} = \frac{bc + bd - be}{b}$$

$$a = c + d - e.$$

$x = c + d - e$

Noch einige Exempla.

$$3x + 4x - 6x = 3a + a + 2a.$$

$$x = 6a.$$

$$x + ab - bc - ab + 2bc = d + 3d - 5d.$$

$$x + bc = - d.$$

§. 49.

Die 3. Anm. Diejenigen deutschen Buchstaben, die sich an dem Ende einer Linie befinden werden, welche zwischen zwey Gleichungen stehet, sollen folgendes bedeuten. K soll bedeuten, daß die Gleichung die über der Linie stehet abgekürtzet werden soll. A soll bedeuten, daß das zu beyden Theilen der Gleichung addiret werden soll, was hinter demselben stehet. S soll bedeuten, daß das von beyden Theilen der Gleichung subtrahiret werden soll, was hinter demselben stehet. M soll bedeuten, daß beyde Theile der Gleichung mit dem multipliciret werden sollen, was hinter demselben stehet. D soll bedeuten, daß beyde Theile der Gleichung mit dem dividiret werden sollen, was hinter demselben stehet. W soll bedeuten, daß aus beyden Theilen der Gleichung die Wurtzel ausgezogen werden soll. Q soll bedeuten daß man beyde Theile der Gleichung quadriren soll.

§. 50.

Die 4. Anm. Die Gleichungen lassen sich füglich abtheilen in die schlechte und in die Potential-Gleichungen. Durch jene wollen wir solche verstehen, in welchen das x in keiner Potenz oder Dignität stehet. Z. E. $x + a - ab = c + 3x$. Durch diese aber wollen wir eine solche Gleichung verstehen, in welcher sich das x in einer gewissen Potenz oder Dignität befindet. Z. E. $x^2 + 3ax = a + b$.

Wir wollen untersuchen

**I. Wie man das *x* in einer schlechten Gleichung absondern soll.** Merket hier

§. 51.

§. 51.

1. Wenn das Glied, welches man wegschaffen will, das Zeichen + hat, so muß man es auf die andere Seite des Zeichens = bringen mit dem Zeichen —. Z. E.

$$\frac{x + a = b}{x = b - a}$$

Beweis. Ist $x + a = b$, so ist auch $x + a - a = b - a$ indem ich gleiches, nämlich a auf beyden Seiten subtrahire (2. Grundsatz.) Wenn man es aber abkürzet, so ist $x = b - a$.

§. 52.

2. Wenn das Glied, welches man wegschaffen will das Zeichen — hat, so muß man es auf die andere Seite des Zeichens = bringen mit dem Zeichen +. Z. E.

$$\frac{x - a = b}{x = b + a.}$$

Beweis. Ist $x - a = b$ so ist auch $x - a + a = b + a$ indem ich gleiches, nämlich a auf beyden Seiten addire. (1. Grundsatz.) Wenn man es aber abkürzet, so ist $x = b + a$.

Mehrere Exempla zur Uebung.

$$x + ab - ac = d$$

—————————— A. ac

$$x + ab = d + ac.$$

—————————— S. ab

$$x = d + ac - ab.$$

$$x + a - abc = d + a$$

—————————— A. abc

$$x + a = d + a + abc.$$

—————————— S. a

$$x = d + a + abc - a.$$

—————————— K.

$$x = d + abc.$$

§. 53.

3. Wenn die Größe die man wegschaffen will, ein Factor ist, so muß man mit ihr alle übrigen Glieder dividiren. Z. E.

$$ax = b$$

—————— b

$$x = \frac{b}{a}.$$

Beweis. Ist $ax = b$, so ist auch $\frac{ax}{a} = \frac{a}{b}$ indem ich gleiches, nämlich $ax = b$ mit gleichem nämlich a dividire (4. Gr.)

(4. Gr.). So ist auch wenn es abgekürzet ist $x = \frac{b}{a}$.

§. 54.

Die 1. Anm. Der bekannte Factor ist bisweilen eine einfache, bisweilen eine zusammengesetzte Grösse. Er ist eine einfache Grösse, wenn das x nur in einem Gliede vorkommet, z. E. $ax + ab = c$. Er ist eine zusammgesetzte Grösse, wenn das x in mehreren Gliedern vorkommet, z. E. $ax + bx$. So oft als das x in mehreren Gliedern vorkommet, so oft muß man denken, daß diese Glieder ein Factum ausmachen, das aus der Multiplication des x und der übrigen bekannten Grössen entstanden ist. Das x ist ein Factor, und das übrige ist der andere Factor, nämlich was übrig bleibet, wenn man aus den Gliedern in welchen das x vorkommet das x wegstreichet. Z. E. $ax + bx$ ist ein Factum, welches aus dem Factore x, und $a + b$ entstanden ist. Besehet folgende Exempla oben bey der Multiplication; so werdet ihr bald wahrnehmen aus welchen Factoribus sie entstanden sind. Man muß also den bekannten Factorem zum Divisore machen. Z. E.

$$\frac{ax + bx = c}{x = \frac{c}{a + b}} \qquad \frac{ax - bx = c}{x = \frac{c}{a - b}.}$$

§. 55.

Die 2. Anm. Man kann sich vorstellen, daß vor einem jeden Gliede 1. stehet, denn es ist alles eins x oder 1x. Hieraus werden folgende Fälle klar.

$$ax + x = b$$
$$ax + 1x = b.$$
$$x = \frac{b}{a+1}$$

$$ax - x = c$$
$$ax - 1x = c$$
$$x = \frac{c}{a-1}.$$

## Mehrere Exempel zur Uebung.

$$ax + bx - cd = ef$$
A. cd.
$$ax + bx = ef + cd$$
D. a + b
$$x = \frac{ef + cd}{a + b}.$$

---

$$ax + bcx - 2x + d = abc$$
S. d.
$$ax + bcx - 2x = abc - d$$
D.
$$x = \frac{abc - d}{a+bc-2}$$

§. 56.

Die 3. Anm. Ist ein gewisser Buchstab in allen Gliedern der ganzen Gleichung zu finden, so dividire man mit ihm alle Glieder. Z. E.

$ax^2$

$$ax^2 + 4xa - bx = dcx$$

——————————D. x.

$$ax + 4a - b = dc$$

——————————A. b

$$ax + 4a = dc + b.$$

——————————S. 4a.

$$ax = dc + b - 4a$$

——————————D. a.

$$x = \frac{dc + b - 4a}{a}$$

§. 57.

4. Wenn die Größe, die man wegschaffen will, einen Divisorem abgiebt, so multiplicire man nur alle Glieder der Gleichung mit derselben. Z. E.

$$\frac{x}{a} = b$$

——————

$$x = ab.$$

Beweis. Ist $\frac{x}{a} = b$ so ist auch $\frac{ax}{a} = ab$, indem ich gleiches mit gleichem multiplicire.) (3. Grund.) Wenn aber dieses abgekürzet wird, kommet $x = ab$ heraus.

## Mehrere Exempla zur Uebung.

$$\frac{x}{a} + b - c = d + e \qquad \text{M. } a$$

$$x + ab - ac = ad + ae \qquad \text{A. } ac$$

$$x + ab = ad + ae + ac \qquad \text{S. } ab.$$

$$x = ad + ae + ac - ab$$

---

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x}{c} + d = e + f \qquad \text{M. } a.$$

$$x + \frac{ax}{b} - \frac{ax}{c} + ad = ae + af \qquad \text{M. } b.$$

$$xb + ax - \frac{abx}{c} + abd = abe + abf \qquad \text{M. } c.$$

$$xbc + acx - abx + abcd = abce + abfc \qquad \text{S. } abcd.$$

$$xbc + acx - abx = abce + abfc - abcd \qquad \text{D.}$$

$$x = \frac{abce + abfc - abcd}{bc + ac - ab.}$$

§. 58.

## §. 58.

Anm. Wenn ein Divisor wegzubringen ist, so bringet ihn zum allerersten weg, darauf könnet ihr die bekannte Glieder eins nach dem andern, oder, wenn ihr schon eine ziemliche Fertigkeit darinn besitzet, auf einmal wegbringen.

## §. 59.

5. Wenn die Glieder, die die Gleichung ausmachen in einer geometrischen Proportion stehen, und so geschrieben werden, z. E. x: a = b + x: c so multipliciret erstlich die äußern Glieder z. E. x und c, darnach die mittlern, z. E. a und b + x. zwischen die Producta setzet das Zeichen = und reduciret es darauf völlig. Z. E.

$x : a = b + x : c$

$xc = ab + ax$

S. ax.

$xc - ax = ab.$

D. c—a

$$x = \frac{ab}{c-a}.$$

$x - d : a = b + x : c$

$xc - dc = ab + ax$

S. ax A. dc

$xc - ax = ab + dc$

D. c—a

$$x = \frac{ab + dc}{c-a}.$$

Beweis. Wenn $x : a = b + x : c$ so ist es auch $\frac{x}{a} = \frac{b+x}{c}$ Denn in beyden Fällen wird angedeutet, x soll dividiret werden mit a, und $b + x$ mit c. Bringet nun die Divisores weg, so kommet $xc = ab + ax$ heraus.

Wir wollen nun untersuchen.

II. Wie man das x in einer Potenzial-Gleichung absondern kann, und zwar

§. 60.

1. In einer Quadratischen. Wenn ein Theil der Gleichung ein vollkommenes Quadrat ist, oder durch Ergänzung zu einem vollkommenen Quadrat gemacht wird, und man ziehet aus demselben die Wurzel heraus, so erhält man entweder eine uninomische, oder eine binomische oder eine trinomische 2c. Wurzel. Ich will zeigen

§. 61.

1.) Wie man da verfahren soll, wo man nur eine uninomische Wurzel zu hoffen hat. Wenn unter den Gliedern der Gleichung nur $x^2$ vorkommet, und kein x sonst, da ist nur eine uninomische Wurzel zu erwarten. Z. E. $x^2 = a$. $x^2 + a = b$. Hier verfahre man folgender Maßen.

(1) Man

(1.) Man bringe auf eine Seite des Zeichens = nur das $x^2$.

(2.) Man ziehe die Quadratische Wurzel auf beyden Seiten. Die Wurzeln werden gleich seyn (5. Gr.) Z. E.

| | | |
|---|---|---|
| $x^2 = a^2$ | $x^2 + a = b$ | $x^2 - a = b$ |
| ——— W. | ——— S. a | ——— A. a. |
| $x = a.$ | $x^2 = b - a$ | $x^2 = b + a.$ |
| | ——— W. | ——— W. |
| | $x = \sqrt{(b - a)}$ | $x = \sqrt{(b + a)}$ |

| | |
|---|---|
| $ax^2 = b$ | $3x^2 + 5x^2 = a$ |
| ——— D. a. | ——— K. |
| $x^2 = \frac{b}{a}$ | $8x^2 = a.$ |
| ——— W. | ——— D. 8. |
| $x = \sqrt{(\frac{b}{a}}$ | $x^2 = \frac{a}{8}$ |
| | ——— W. |
| | $x = \sqrt{\left(\frac{a}{8}\right)}$ |

$\frac{x^2}{a} = b$

——— M. a.

$x^2 = ab.$

——— W.

$x = \sqrt{(ab)}.$

Nun wollen wir sehen

§. 62.

2.) Wie man da verfahren soll, wo eine binomische Wurzel zu erwarten stehet. Wo $x^2$ und in einem Gliede noch x vorkommet, da ist eine binomische Wurzel verborgen. Z. E. $x^2 + 2xa$. Oder $x^2 - x$ ꝛc. Hier sind aber wiederum verschiedene Fälle auseinander zu setzen. Denn ein Theil der Gleichung ist, entweder ein vollständiges Quadrat, oder ein unvollständiges. Ich will nun zeigen wie man da verfahren soll.

§. 63.

(1.) Wo ein Theil der Gleichung ein vollständiges Quadrat ausmachet. Ziehet nur erst die Wurzel heraus, und bringet nachhero auf die andere Seite die bekannte Wurzel. Z. E.

$x^2 + 2xa + a^2 = b$

——————— W.

$x + a = \sqrt{(b)}$

——————— S. a.

$x = \sqrt{(b)} - a$

$x^2 - 2xa + a^2 = c$

——————— W.

$x - a = \sqrt{(c)}$

——————— A. a

$x = \sqrt{(c)} + a.$

Wenn

Wenn man x + a quadriret, so erhält man $x^2 + 2ax + a^2$ und wenn man x — a quadriret, so erhält man $x^2 - 2xa + a^2$. Sehet es oben bey der Multiplication.

§. 64.

(2.) Wo ein Theil der Gleichung ein unvollständiges Quadrat ausmachet. Es fehlet bisweilen das Quadrat von dem zweyten Theil der Wurzel, nämlich das $a^2$ z. E. $x^2 + 2ax$. Bisweilen fehlet das Quadrat, und der Coefficient von dem zweyten Gliede die 2. z. E. $x^2 + xa$. Solche Gleichung wird genannt: **Eine unreine Quadratische Gleichung.** Aequatio quadratica affecta. Bisweilen fehlet auch der zweyte Theil der Wurzel in dem zweyten Gliede z. E. $x^2 + x$. Bisweilen ist auch das Quadrat $x^2$ mit einem bekannten Factore verbunden. z. E. $ax^2 + xb$. In allen diesen Fällen muß man erstlich das Quadrat ergänzen, d. i. zu beyden Theilen der Gleichung dasjenige addiren, was dem Quadrato fehlet, wenn es ein vollständiges Quadrat seyn soll. Woraus kann man denn aber erkennen was dazu an einem vollständigen Quadrato fehlet? Es ist keine allgemeine Regel vorhanden nach welcher man sich in Ergänzung der unvollständigen Quadraten verhalten möchte. Bemerket euch also desto genauer die Ergänzung

der

der Quadraten, die ich bald vornehmen werde. Wollet ihr euch überzeugen, daß nothwendig dasjenige hinzugesetzt werden muß, was ich hinzusetzen werde, so quadriret nur die Wurzeln, die ich überall ausziehen werde: so werdet ihr euch von der Richtigkeit bald überzeugen. Oder, besehet alle diese Exempla oben bey der Multiplication. Wenn das unvollständige Quadrat zu einem vollständigen gemacht worden ist, so ziehet auf beyden Seiten die Wurzeln heraus. Ich will nun insbesondere zeigen

## §. 65.

a.) Wie man das x aus einer unvollständigen Quadratischen Gleichung herausbringet, in welcher das Quadrat von der zweyten Wurzel fehlet. Z. E. $x^2 + 2ax = b$. $x^2 - 2ax = c$.

$x^2 + 2ax = b$

——————— A. $a^2$

$x^2 + 2ax + a^2 = b + a^2$

——————————— W.

$x + a = \sqrt{(b + a^2)}$

——————————— S. a.

$x = \sqrt{(b + a^2)} - a.$

$x^2 -$

$$x^2 - 2ax = c.$$

——————————— A. $a^2$

$$x^2 - 2ax + a^2 = c + a^2$$

——————————— W.

$$x - a = \sqrt{(c + a^2)}$$

——————————— A. $a$.

$$x = \sqrt{(c + a^2)} + a.$$

## §. 66.

b) Wie man das x aus einer unvollständigen Quadratischen Gleichung herausbringet, in welcher das Quadrat von der zweyten Wurzel und der Coefficient 2 aus dem zweyten Gliede fehlet. Z. E. $x^2 + ax$ oder $x^2 - ax$.

$$x^2 + ax = b$$

——————————— A $\frac{a^2}{4}$

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$$

——————————— W.

$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{\left(b + \frac{a^2}{4}\right)}$$

——————————— S. $\frac{a}{2}$

$$x = \sqrt{\left(b + \frac{a^2}{4}\right)} - \frac{a}{2}$$

$x^2 -$

$$x^2 - ax = c.$$

A. $\frac{a^2}{4}$

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = c + \frac{a^2}{4}.$$

W.

$$x - \frac{a}{2} = \sqrt{\left(b + \frac{a^2}{4}\right)}$$

A $\frac{a}{2}$.

$$x = \sqrt{\left(c + \frac{a^2}{4}\right)} + \frac{a}{2}$$

§. 67.

c.) Wie man das x aus einer unvollständigen Quadratischen Gleichung heraus bringet, in welcher das Quadrat von der zweyten Wurzel nebst der zweyten Wurzel und dem Coefficienten fehlet. z. E. $x^2 + x$, oder $x^2 - x$.

$$x^2 + x = a$$

$$x^2 + 1x = a.$$

A. $\frac{1}{4}$

$$x^2 + 1x + \frac{1}{4} = a + \frac{1}{4}$$

W.

$$x + \frac{1}{2} = \sqrt{(a + \frac{1}{4})}$$

S. $\frac{1}{2}$

$$x = \sqrt{(a + \frac{1}{4})} - \frac{1}{2}.$$

$x^2 - x = b.$

$x^2 - 1x = b$

A. $\frac{1}{4}$.

$x^2 - 1x + \frac{1}{4} = b + \frac{1}{4}.$

W.

$x - \frac{1}{2} = \sqrt{(b + \frac{1}{4})}.$

A. $\frac{1}{2}$

$x = \sqrt{(b + \frac{1}{4})} + \frac{1}{2}$

§. 68.

d.) Wie man das x aus einer unvollständigen Quadratischen Gleichung herausbringet, in welcher das Quadrat von der zweyten Wurzel fehlet, und das Quadrat von $x^1$ mit einem bekannten Factore verbunden ist. Z. E. $ax^2 + bx = c$. $ax^2 + x = d$.

$ax^2 + bx = c$

D. a.

$x^2 + \frac{bx}{a} = \frac{c}{a.}$

A. $\frac{b^2}{4a^2}$

$x + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$

W.

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\left(\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right)} \quad \text{S.} \ \frac{b}{2a}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right)} - \frac{b}{2a}.$$

Nun sind wir im Stande aus allen möglichen Quadratischen binomischen Gleichungen das unbekannte x abzusondern, und wir müssen nunmehro weiter untersuchen:

§. 69.

3. Wie man da verfahren soll, wo eine polynomische Wurzel verborgen lieget. Wenn sich in einer Gleichung das $x^2$, und in zwey oder mehreren Gliedern das x befindet, da ist eine polynomische Wurzel zu finden, z. E. $x^2 + 2ax - cx = b$. Wenn das x in zwey Gliedern stehet wie in obigem Exempel, da ist eine trinomische, wenn es in drey Gliedern stehet, eine quadrinomische Wurzel zu finden, z. E. $x^2 + 2ax + bx - cx = m$. Wenn man nun das x aus einer solchen Gleichung absondern will, so muß man

1.) Die Wurzeln, aus welchen das vollständige, oder unvollständige Quadrat entstan-

standen ist, suchen. Man wird sie aber auf folgende Art finden. Es sey die Gleichung, aus welcher man das x absondern will, $x^2 + 2ax - cx = b$. Stellet euch nun vor, wenn die Gleichung diese gewesen wäre $x^2 + 2ax$, was wäre nun da die Wurzel gewesen? Wenn man diese Gleichung unter den vorhergehenden unvollständigen Quadratischen Gleichungen suchet, so findet man, daß die Wurzel aus diesem, wenn ihm noch etwas addiret wird $x + a$ sey. Dieses muß man sich bemerken. Stellet euch nun vor, unsere Gleichung sey $x^2 - cx$ gewesen, was wird denn die Wurzel seyn? Wenn man diese Gleichung wiederum unter den vorhergehenden unvollständigen Quadratischen Gleichungen suchet, so findet man, daß die Wurzel aus diesem, wenn ihm noch etwas addiret wird $x - \frac{c}{2}$ sey. Und so haben wir nun die Wurzeln von dem $x^2 + 2ax - cx$, wenn es ergänzet wird, gefunden, sie sind nämlich $x + a - \frac{c}{2}$.

2.) Nehmet darauf diese drey gefundene Wurzeln, und quadriret sie. Das Qua-

drat aus $x + a - \frac{c}{2}$ wird folgendes seyn. $x^2 + 2ax + a^2 - xc - ac + \frac{c^2}{4}$.

3.) Vergleichet nun dieses gefundene Quadrat mit der gegebenen Gleichung $x^2 + 2xa - cx = b$, und sehet, was an diesem Theil der Gleichung nämlich $x^2 + 2ax - cx$ fehlet, wenn es ein vollständiges Quadrat seyn sollte. Man wird sehr leicht finden, wenn man dieses von dem vollständigen Quadrat subtrahiret, daß daran $a^2 - ac + a + \frac{c^2}{4}$ fehlen.

4.) Addiret diesen Rest zu beyden Theilen der gegebenen Gleichung auf folgende Weise:

$$\begin{array}{l} x^2 + 2ax - cx = b \\ a^2 - ac + \frac{c^2}{4} = a^2 - ac + \frac{c^2}{4} \\ \hline x^2 + 2ax - cx + a^2 - ac + \frac{c^2}{4} = b + a^2 - ac + \frac{c^2}{4}. \end{array}$$

5.) Nun

5.) Nun kann man aus beyden Theilen die Wurzel ausziehen, die uns schon bekannt ist:

$$x + a - \frac{c}{2} = \sqrt{\left(b + a^2 - ac + \frac{c^2}{4}\right)}$$

6.) Man muß endlich die bekannten Glieder versetzen,

$$x = \sqrt{\left(b + a^2 - ac + \frac{c^2}{4}\right)} - a + \frac{c}{2}.$$

## §. 70.

Die 1. Anm. Wenn das, woraus wir die Quadratische Wurzel ziehen, oder ziehen sollen, das Zeichen + hat, so kann man vor die Wurzeln + oder − setzen. Z. E. $+\sqrt{(a+b)}$, oder $-\sqrt{(a+b)}$. Es wird gemeiniglich so gesetzet $\pm\sqrt{(a+b)}$. Denn die Wurzel mag positiv, oder negativ seyn, so muß doch das Quadrat positiv bleiben.

Die 2. Anm. Auf eben diese Weise wird das x gesucht in einer Gleichung, in welcher eine Quadrinomische und allerley Polynomische Wurzeln stecken. Nun sind wir im Stande aus allen möglichen Quadratischen Gleichungen das unbekannte x abzusondern. Wir wollen anjetzo untersuchen:

## §. 71.

2.) Wie man das x in einer jeden Potenzial-Gleichung absondern soll, die höher ist als ein Quadrat. Und zwar

## §. 72.

1.) Wenn nur eine uninomische Wurzel zu erwarten ist. Ich will dieses gleich mit Exemplis zeigen. Es soll z. E. aus $x^3 = a$. $x^3 + a = b$. $ax^3 = b$. $\frac{x^4}{a} = b$. die Wurzel ausgezogen werden, damit uns das x bekannt werde.

$$x^3 = a. \qquad \underline{\phantom{xxxx}} \qquad x = \sqrt[3]{a}.$$

$$x^3 + a = b. \quad \text{S. a.} \qquad x^3 = b - a \quad \text{W.} \qquad x = \sqrt[3]{(b - a)}.$$

---

$$a x^3 = b \quad \text{D. a.} \qquad x^3 = \frac{b}{a} \quad \text{W.} \qquad x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

$$\frac{x^4}{a} = b \quad \text{M. a.} \qquad x^4 = ab. \quad \text{W.} \qquad x = \sqrt[4]{ab}.$$

## §. 73.

2.) Wenn in mehreren Gliedern das x vorkommet, und die Wurzel ist also polynomisch. Ich will die Regeln alsobald auf ein Exempel anwenden. Es soll z. E. aus dieser Gleichung $x^3 + 4\,xa - b$ die Wurzel

zel gesuchet werden. Es ist gewiß, daß eine von den Wurzeln x, die andere a seyn muß.

a) Erhöhet nun das x + a in die Potenz, in welcher das x in der gegebenen Gleichung stehet. Hier stehet es in der dritten Potenz. Wenn man das x + a in die dritte Potenz erhöhet, so erhält man folgendes: $x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$.

b.) Vergleichet diese gefundene Potenz von a + b mit dem Theil $x^3 + 4xa$ der gegebenen Gleichung, und sehet zu, ob sie mit ihm völlig übereinkomme, oder nicht.

c.) Wenn die gefundene Potenz von x + a mit dem Theil der gegebenen Gleichung völlig übereinkommet, so ziehet nur auf beyden Seiten Wurzeln aus. In den angeführten Exempeln kommet die dritte Potenz von x + a mit dem Theil der gegebenen Gleichung nicht völlig überein.

d.) Wenn die gefundene Potenz von x + a mit dem Theil der gegebenen Gleichung nicht völlig übereinkommet, so sehet zu, ob die Glieder, die in dem Theil der gegebenen Gleichung fehlen, nur aus bekannten Größen bestehen. Bestehen sie nur aus bekannten Größen, so addiret sie auf beyden Seiten der Gleichung,

und ziehet nachhero die Wurzeln heraus. Wenn aber die Glieder, die in dem Theil der gegebenen Gleichung fehlen, wenn er eine vollständige Potenz seyn sollte, aus unbekannten Größen bestehen, so verfahret nach der folgenden Anweisung.

§. 74.

Es sind unzählige Potenzialgleichungen, die nach der vorgeschriebenen Methode unmöglich reduciret werden können: man muß also auf ein Mittel bedacht seyn, welches uns in diesen Schwierigkeiten und Unvollkommenheiten aushelfen möchte. Was würde sich unsere Algebra für einen Namen verdienen? Wozu würde sie uns nütze seyn? Wenn sie uns blos zeiget, wie man sich das x in einigen Gleichungen bekannt machen kann, und schweiget, wenn sie zeigen soll, wie man mit den übrigen Gleichungen zu rechte kommen soll. Es ist zwar die Wahrheit, daß solche Gleichungen sehr selten vorkommen; und daß man schon mit unzähligen Gleichungen fertig werden kann, wenn man nur das obige verstehet: allein es könnte dem ungeachtet eine oder die andere Gleichung von dieser Art vorkommen, in welcher wir uns das x nothwendig bekannt machen wollten. Deßwegen will ich nun zeigen, wie man das x aus allen Potenzialgleichungen herausbringen

kann,

kann, als welches sich durch die vorhergehende Regeln nicht herausbringen läßt. Merket hier folgende Regeln.

§. 75.

I. Suchet eine ganze Zahl, der das x gleich seyn möchte, oder eine solche Zahl, die nur um einen Bruch kleiner ist als das x, durch blosses Versuchen. Das sehr ungewisse, mühsame und weitläuftige Versuchen kann auf eine von zwey folgenden Arten merklich abgekürzet und erleichtert werden.

§. 76.

1. Nehmet das bekannte Glied aus der gegebenen Gleichung, und zerfället es in die Factores, aus deren Multiplication es entstehen könnte. Machet mit diesen Factoribus einen nach dem andern eben das, was mit dem x gemacht worden ist; so werdet ihr bald wahrnehmen, welcher Größe das x gleich sey.

Z. E. Es sey die gegebene Gleichung $x^3 + 2x = 33$. Ich zerfälle das 33 in die Factores, aus deren Multiplication es enstehen könnte. Ich versuche es zu dividiren mit 1, 2, 3, 4, 5, 2c. Diese Zahl aber lässet sich durch keine Zahlen als durch 1. und 3. dividiren, die Factores also, aus deren

Multiplication es enstehen konnte, sind folgende 1, 33. und 3, 11.

| | |
|---|---|
| Es sey nun $x = 1$ | Oder $x = 33$ |
| So ist $x^3 = 1$ | $x^3 = 35937$ |
| $2x = 2$ | $2x = 66$ |
| $x^3 + 2x = 3.$ | $x^3 + 2x = 36003.$ |

| | |
|---|---|
| Oder $x = 3$ | Oder $x = 11$ |
| $x^3 = 27$ | $x^3 = 1331$ |
| $2x = 6$ | $2x = 22$ |
| $x^3 + 2x = 33.$ | $x^3 + 2x = 1353.$ |

Weil $x^3 + 2x = 33$, und $3^3 + 2, 3$ oder $27 + 6$ auch $= 33$: so ist es offenbar, daß $x = 3$ seyn müsse.

Ich will es noch mit diesem Exempel erläutern. Es sey $x^3 + x^2 = 80$. Die Factores, aus deren Multiplication dieses 80 entstehen könnte, sind 2 und 40. 4, 20. 5 und 16. 8 und 10.

| | |
|---|---|
| Es sey nun $x = 2.$<br>$x^3 = 8$<br>$x^2 = 4$<br>$x^3 + x^2 = 12.$ | Oder $x = 4$<br>$x^3 = 64$<br>$x^2 = 16$<br>$x^3 + x^2 = 80.$ |

Oder $x = 5$
$x^3 = 125$
$x^2 = 25$
$x^3 + x^2 = 150.$

So ist das $x = 4.$

Anm. Wenn sich die Zahl in keine Factores zergliedern lässet, so werfet einige wenige Zahlen von ihr weg, bis ihr eine Zahl erhaltet, die sich ganz bequem in einige Factores zerfallen läßt. z. E. $x^3 - x = 51.$ Ich will von 51, 3 wegwerfen, so erhalte ich 48. eine Zahl die sich in viele Factores zertheilen lässet, z. E. in diese. 2 und 24. 3 und 16. 4 und 12. 6 und 8.

| | |
|---|---|
| Es sey nun $x = 2$<br>So ist $x^3 = 8$<br>$x = 2$<br>$x^3 - x = 6.$ | Oder $x = 3$<br>$x^3 = 27$<br>$x = 3$<br>$x^3 - x = 24.$ |

Oder $x = 4$
$x^3 = 64$
$x = 4$
$x^3 - x = 60.$

Die-

Diejenige ganze Zahl also, die dem x gleich ist, ist 3. Sie ist aber doch etwas kleiner, aber nur um einen Bruch. Denn 4 ist sie nicht, diese ist schon zu groß.

§. 77.

Ich gehe nun zu der zweyten Methode, die uns zeiget, wie man sich helfen soll, wenn wir die ganze Zahl durchs Versuchen suchen, die dem x gleich seyn soll.

2. Nehmet dasjenige Glied, in welchem das x in der höchsten Potenz stehet, und werfet die übrigen Glieder weg, stellet euch sodann vor, daß das bekannte diesem gleich sey, und suchet nachhero die Wurzel auf beyden Seiten. Die Brüche, die man noch durch die Ausziehung der Wurzel aus der Zahl erhalten könnte, kann man gänzlich weglassen.

Es sey z. E. $x^3 + 2x = 33$. Setzet nun $x^3 = 33$. so ist $x = \sqrt[3]{33} = 3$. Versuchet darauf, ob diese die rechte Zahl sey, die dem x gleich ist. Setzet $x = 3$. so ist $x^3 = 27$. und $2x = 6$. folglich $x^3 + 2x = 27 + 6 = 33$. Diese ist also die rechte Zahl. Ich will dieses noch mit einigen Exempeln erläutern.

Es

Es sey $x^3 + 2x^2 = 200$

$$x^3 = 200$$

$$x = \sqrt[3]{200} = 5.$$

Also $x^3 = 125$

$$x^2 = 25$$

$$2x^2 = 50$$

$$x^3 + 2x^2 = 175.$$

Diese Zahl 175 ist weit kleiner als 200, welcher $x^3 + 2x^2$ gleich ist. Machet also die 5 nur um 1 größer. Setzet $x = 6$, so ist $x^3 = 216$. $x^2 = 36$. $2x^2 = 72$, folglich $x^3 + 2x^2 = 288$. Ihr sehet nun, daß x unmöglich seyn könne. Es ist zwar das x etwas größer als 5, aber nicht un eine ganze Zahl, sondern nur um einen gewissen Bruch.

Es sey noch $2x^3 - 3x = 200.$

So ist $2x^3 = 200$

$$x^3 = \frac{200}{2} = 100$$

$$x = \sqrt[3]{100} = 4.$$

$$x^3 = 64$$

$$2x^3 = 128$$

$$3x = 12$$

Also $2x^3 - 3x = 116.$

Weil

Weil 116 weit kleiner ist als 200, dem doch $2x^3 - 3x$ gleich seyn soll. Versuchet ob x nicht 5 seyn könnte. Ihr werdet finden, daß es unmöglich seyn könne, weil $2, 5^3 - 3, 5 = 235$. Es ist nicht nöthig von den übrigen höhern Potenzien etw s insbesondere zu erinnern. Es ist sehr leicht zu begreifen, daß sich in allen übrigen Potenzial-Gleichungen die ganze Zahl, die dem x gleich ist, oder nur um einen Bruch kleiner ist, auf die vorhergehende Art finden lasse. Doch, daß ihr daran nicht zweifeln möget, will ich eine Potenzial-Gleichung von der vierten Potenz hersetzen, und nach der zweyten Methode ausführen. Es sey $x^4 + 2x^3 - 4x^2 = 100$.

So ist $x^4 = 100$.

Also

$x = \sqrt[4]{100} = 3$.

$$x^4 = 81$$
$$x^3 = 27$$
$$2x^3 = 54$$
$$x^2 = 9$$
$$4x^2 = 36.$$

$$x^4 + 2x^3 - 4x^2 = 99.$$

Nun sind wir im Stande die Zahl zu finden, die das x in allen möglichen Potenzial-Gleichungen bedeuten möchte, oder eine andere, die nur um einen Bruch kleiner ist, als diejenige, welcher das x gleich ist. Jetzt müssen wir untersuchen

§. 78.

§. 78.

II. Wie man den Bruch finden kann, um welchen die gefundene Zahl kleiner ist, als diejenige ist, welcher das x in einer Potenzial-Gleichung gleich ist. Sehet §. 76. diese Gleichung an, $x^3 - x = 51$. Wir haben gefunden, daß, wenn $x = 3$, so ist $x^3 - x = 24$. Folglich muß x noch größer seyn, als 3. Um 1. ist es nicht größer, es muß also um einen Bruch größer werden, wir wollen daher untersuchen, wie man diesen Bruch so genau finden kann, als man immer verlangen kann. Ich will folgende Methode vorschlagen, und sie gleich auf ein Exempel anwenden. Setzet $x^3 + x = 40$.

1. Suchet nach den vorhergehenden Methoden die nächst kleinere ganze Zahl, die nur um einen Bruch kleiner ist als diejenige, welcher das x gleich ist. Diese Zahl ist 3.

2. Nennet diese Zahl 3, a, und den Bruch, um welchen 3 kleiner ist als diejenige Zahl, welche dem x gleich ist y, und die Zahl 40 b. So ist $x = a + y$.

3. Machet nun mit dem $a + y$ alles das, was mit dem x in der Gleichung geschehen ist. Also

$$x^3 = a^3 + 3a^2y + 3ay^2 + y^3$$
$$x = a + y$$

$$x^3 + x = a^3 + a + 3a^2y + y + 3ay^2 + y^3 = b.$$

4. Stellet euch das $y^3$ vor, als eine bekannte Größe, und führet nun diese Gleichung aus folgender Maaßen.

$$a^3 + a + 3a^2y + y + 3ay^2 + y^3 = b$$

S. $a^3 + a + y^3$

$$3ay^2 + 3a^2y + y = b - a^3 - a - y^3$$

D. 3 a.

$$y^2 + ay + \frac{y}{3a} = \frac{b - a^3 - a - y^3}{3a.}$$

Ergänzet darauf dieses wie §. 69. gewiesen worden ist.

$$y^2 + ay + \frac{y}{3a} + \frac{a^2}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{36a^2}$$

$$= \frac{b - a^3 - a - y^3}{3a} + \frac{a^2}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{36a^2}$$

$$y + \frac{a}{2} + \frac{1}{6a} = \sqrt{\left(\frac{b - a^3 - a - y^3}{3a} + \frac{a^2}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{36a^2}\right)}$$

S. $\frac{a}{2} + \frac{1}{64}$.

$$y = \sqrt{\left(\frac{b - a^3 - a - y^3}{3a} + \frac{a^2}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{36a^2}\right)} - \frac{a}{2} - \frac{1}{6a}$$

5. Machet endlich mit den Zahlen, was hier mit den Buchstaben gemacht worden ist. $a = 3$. $b = 40$. Das $y^3$, weil es einen sehr kleinen Bruch bedeutet, könnet ihr auslassen. Folglich ist $\frac{b - a^3 - a}{3a} = \frac{10}{9}$.

$\frac{a^2}{4} = \frac{9}{4}$. $\frac{1}{36a^2} = \frac{1}{324}$. $\frac{b - a^3 - a}{3a} + \frac{a^2}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{36a^2} = \frac{10296}{2816}$.

$$\sqrt{\left(\frac{b - a^3 - a}{3a} + \frac{a^2}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{36a^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{10296}{2816}\right)} = \frac{101}{53}. \quad \frac{101}{53} - \frac{a}{2} - \frac{1}{6a} = \frac{167}{477}.$$

Das verlangte y also ist $\frac{167}{477}$ und $x = 3 + \frac{167}{477}$. Weil wir aber $\frac{y^3}{3a}$ weggeworfen haben, so muß freylich das x etwas kleiner seyn, als $3 + \frac{167}{477}$. Verwandelt dieses in die Decimal-Brüche, so erhaltet ihr $x = \frac{3348}{1000}$. Es ist schon erinnert, daß x kleiner seyn müße, nehmet also an, $x = \frac{33}{10}$. Machet nun die Probe $x^3 = \frac{35937}{1000}$ und $x^3 + x = \frac{39237}{1000}$. Es sollte aber seyn $x^3 + x = \frac{40000}{1000}$. so ist klar, daß x größer seyn müße als $\frac{33}{10}$. Um $\frac{1}{10}$ ist es nicht größer. Setzet $x = \frac{34}{10}$, so ist $x^3 = \frac{39304}{1000}$ und $x^3 + x = \frac{42704}{1000}$.

Seyd ihr noch nicht mit zehen Theilchen zufrieden, und ihr verlanget sie noch in hundert Theilchen zu haben, so setzet wiederum

$x = a + y . a = \frac{33}{10} b = 40.$

Ihr habet nicht nöthig aufs neue eine Gleichung zu machen, behaltet nur diese, die wir oben herausgebracht haben.

$$y = \sqrt{\left(\frac{b - a^3 - a}{3a} + \frac{a^2}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{36a^2}\right)} - \frac{a}{2} - \frac{1}{6a}.$$

Wenn man alles dieses machet, so findet man das $x = \frac{3322.}{1000.}$ Wenn man das x noch genauer haben wollte, so setze man wiederum daß $x = a + y$, und $a = \frac{3322}{1000.}$

Ich will dieses noch mit der folgenden Gleichung erläutern $x^3 + 2x^2 = 20$. Suchet die ganze Zahl, die nur um einen Bruch kleiner ist als diejenige, die dem x gleich ist. Diese ist 2. Setzet nun $x = 2 + y$. Hier will ich die Zahlen behalten.

$$x^3 = 8 + 12y + 6y^2 + y^3$$
$$x^2 = 4 + 4y + y^2$$
$$2x^2 = 8 + 8y + 2y^2$$

$$x^3 + 2x^2 = 16 + 20y + 8y^2 \ldots = 20.$$

$$8y^2 + 20y = 20 - 16 = 4.$$

D. 8.

$$y^2 + \frac{20y}{8} = \frac{4}{8}$$
K.

$$+ \frac{5y}{2} = \frac{1}{2}$$
A. $\frac{25}{16}$.

$$y^2 + \frac{5y}{2} + \tfrac{25}{16} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{25}{16} = \tfrac{33}{16}$$
W.

$$y + \tfrac{5}{4} = \sqrt{(\tfrac{33}{16})} = \tfrac{5}{4}$$

$$y = \tfrac{5}{4} - \tfrac{5}{4} = 0.$$

Hier kommet o heraus, da doch nothwendig etwas herauskommen muß. Ziehet also aus dem 33 die Wurzel genauer heraus. Setzet $\frac{3300}{100}$. So ist die Wurzel $\frac{57}{10}$. Dividiret dieses mit der Wurzel von 16. so erhaltet ihr $\frac{57}{40}$. Ziehet nun davon $\frac{5}{4}$ ab, bleiben $\frac{7}{40}$. So ist $y = \frac{7}{40}$. Oder nach den Decimal-Brüchen $\frac{1}{10}$. x ist also $= \frac{21}{10}$ folglich

$$x^3 + 2x^2 = \frac{18081}{1000}.$$

Wollet ihr den Werth von x noch genauer wissen, so setzet $x = \frac{21}{10} + y$. Folglich

$$x^3 = \frac{9261}{1000} + \frac{1323y}{10} + \frac{63y^2}{100} \ldots$$

$$2x^2 = \frac{882}{100} + \frac{84y}{10} + \frac{2y^2}{100}.$$

$$x^3 + 2x^2 = \frac{18081}{1000} + \frac{1407y}{10} + \frac{65y^2}{100} = 20.$$

S.

$$\frac{65y^2}{100} + \frac{1407y}{10} = 20 - \frac{18081}{1000} = \frac{1919}{1000}.$$

M. 1000.

$$650y^2 + 140700y = 1919.$$

D. 650.

$$y^2 + \frac{14070y}{65} = \frac{1919}{650} \text{ A.}$$

$$y^2 + \frac{14070y}{65} + \frac{197964900}{16900} = \frac{1919}{650}$$

$$+ \frac{197964900}{16900} = \frac{198014794}{16900}.$$

$$y + \frac{7035}{65} = \sqrt{\left(\frac{198014794}{16900}\right)} = \frac{14071}{130}$$

$$y = \frac{14071}{130} - \frac{7035}{65} = \frac{65}{8450.} = \frac{76}{1000}$$

Folglich ist $x = \frac{21}{10} + \frac{76}{1000} = \frac{2176}{1000.}$

und $x^3 + 2x^2 = \frac{19773259776}{1000000000.}$

# Der II. Abschnitt.

## Von der Reduction einer Gleichung, in der sich mehrere unbekannte Größen befinden.

§. 79.

Wenn wir eine Gleichuug haben, in der sich mehrere unbekannte Größen befinden, als eine, so haben wir auch entweder so viele Gleichungen, wie viele unbekannte Größen, oder nicht. Ich will erstlich zeigen, wie man sich in dem ersten, nachhero wie man sich in dem zweyten Fall verhalten soll.

§. 80.

Wenn wir z. E. zwey unbekannte Größen, und auch zwey Gleichungen haben, so wollen wir eine von den unbekannten, als bekannt, und die andere, als unbekannt ansehen, und also beyde Gleichungen auf die unbekannte Größe reduciren, z. E. $x+y=a$. $x-y=b$. Das x will ich, als unbekannt, und das y als bekannt ansehen, und folglich so reduciren:

$x + y = a$      $x - y = b.$

———————S. y      ———————A. y.

$x = a - y$      $x = b + y.$

Weil nun $a - y$ so groß ist als $x$, und $b + y$ ist auch so groß als $x$, so ist $a - y$ so groß als $b + y$, folglich kann ich sie zusammen setzen, und jetzund das $y$ als unbekannt ansehen.

$a - y = b + y$

———————————A. y.

$a = b + y + y$

———————————K.

$a = b + 2y$

———————————S. b.

$a - b = 2y$

———————————D. 2

$$\frac{a - b}{2} = y.$$

Nun können wir uns das $y$, und folglich auch das $x$ bekannt machen.

§. 81.

Die 1. Anm. Bisweilen muß man eine von den unbekannten Größen in eine Dignität erhöhen. Es sey z. B. $x + y = a$ $x^2 + y^2 = b$.

$x + y = a$      $x^2 + y^2 = b$

———————S. y.      ———————S. $y^2$

$x = a - y$      $x^2 = b - y^2$

———————Q.

$$x^2 = a^2 - 2ay + y^2$$

$$a^2 - 2ay + y^2 = b - y^2$$

A. $y^2$

$$a^2 - 2ay + y^2 + y^2 = b$$

K.

$$a^2 - 2ay + 2y^2 = b$$

S. $a^2$

$$2y^2 - 2ay = b - a^2$$

D. 2.

$$y^2 - ay = \frac{b - a^2}{2}$$

A. $\frac{a^2}{4}$

$$y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{b - a^2}{2} + \frac{a^2}{4}$$

W.

$$y - \frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{b - a^2}{2} + \frac{a^2}{4}\right)}$$

A. $\frac{a}{2}$

$$y = \sqrt{\left(\frac{b - a^2}{2} + \frac{a^2}{4}\right)} + \frac{a}{2}.$$

§. 82.

§. 82.

Die 2. Anm. Bisweilen können die Theile der Gleichungen mit einander addiret und subtrahiret, bisweilen multipliciret und dividiret ꝛc. werden. Es sey noch z. E. die obige Gleichung $x + y = a$ und $x - y = b$.

Durch die Addition.

$$x + y = a$$
$$x - y = b$$
A.
$$x + y + x - y = a + b$$
R.
$$2x = a + b$$
D. 2.
$$x = \frac{a + b}{2}$$

Durch die Subtraction.

$$x + y = a$$
$$-x + y = -b$$
A.
$$x + y - x + y = a - b$$
R.
$$2y = a - b$$
D. 2.
$$y = \frac{a - b}{2}.$$

Man muß diese Arten nicht aus der Acht lassen, denn sie geben uns bisweilen sehr nützliche Regeln an die Hand.

§. 83.

Die 3. Anm. Wenn man schon das x auf eine Seite gebracht hat, so giebt dieses eine Regel ab, die man immer wörtlich ausdrücken kann, wenn man nur anstatt der Buchstaben, die Größen namhaft machet, welche die Buchstaben bedeuten. Z. E. In der nächst vorhergehenden Gleichung $x + y = a$. a ist die Summe von zwey unbekannten Zahlen $x - y = b$. b ist die Differenz von denselben zwey unbekannten Zahlen, x ist die größere, und y die klei-

nere von den zwey unbekannten Zahlen. Die letzte Gleichung $x = \frac{a+b}{2}$ kann so ausgedruckt werden.

Die größere von zwey unbekannten Zahlen ist dem Quotienten gleich, der entstehet, wenn man die Summe von der Summe, und der Differenz der zwey Zahlen mit 2. dividiret. Die zweyte $y = \frac{a-b}{2}$ kann man so ausdrücken:

Die kleinere von zwey unbekannten Zahlen ist dem Quotienten gleich, der entstehet, wenn man die Differenz von der Summe und der Differenz der zwey Zahlen mit 2. dividiret. Allein es ist tausendmal leichter die Regel zu verstehen, sich dieselbe vorzustellen, zu übersehen, und zu brauchen, wenn sie mit den Buchstaben, als mit den Wörtern ausgedrückt wird.

## §. 84.

Nun will ich zeigen, wie man da verfahren soll, wenn sich in einer Gleichung mehrere unbekannte Größen befinden, als wir Gleichungen haben. In solchem Fall kann man die letzte unbekannte Größe als bekannt annehmen, und ihr einen Werth, den man will, beylegen.

## §. 85.

Nun gehe ich zu der letzten Handlung, die man vornehmen muß, wenn man sich die unbekannte Größe bekannt machen will. Diese ist.

IV. Die Application, oder die Construction der Gleichung. Wenn wir schon völlig das x auf die eine, und die bekannten Größen auf die andere Seite gebracht haben, so folgt die letzte Handlung die Application, die sich in folgende drey Handlungen zergliedern läßt.

1. **Man muß den bekannten Buchstaben die Bedeutung geben.** Die bekannten Buchstaben können Zahlen, Linien, Flächen oder Cörper bedeuten. Man muß sich also das auf der Seite bemerken, was sie bedeuten sollen. Z. E. Wir haben aus den Gleichungen $x + y = a$. $x - y = b$ folgendes herausgebracht $x = \frac{a+b}{2}$ und $y = \frac{a-b}{2}$.

Es sey also $a = 12$ $b = a$.

2. **Man muß das mit den Zahlen, Linien, Flächen oder Cörpern machen, was da mit den bekannten Buchstaben gemacht worden ist.** Z. E. in der Gleichung $x = \frac{a+b}{2}$. Ich soll zu a. d. i. zu 12. b. d. i. 8 addiren, und die 20. welche herauskommen mit 2 dividiren, der Quotient davon 10 soll dem x gleich seyn. $y = \frac{a-b}{2}$. Dieses mache ich so: ich soll von a d. i. 12. b. d. i. 8. subtrahiren, und die 4. die herauskommen mit 2. dividiren; der Quotient 2. soll dem y. gleich seyn.

3. **Man muß die Probe machen.** Wir setzen anstatt der unbekannten Buchstaben die in den ersten Gleichungen vorkommen die gefundene Zahlen, und

all-

anstatt der bekannten Buchstaben auch Zahlen, und sehen zu, ob da die Gleichheit anzutreffen sey, oder nicht. Z. E. Anstatt $x = \frac{a+b}{2}$ setze ich $10 = \frac{12+8}{2} = 10$. Anstatt $y = \frac{a-b}{2}$ setze ich $2 = \frac{12-8}{2} = 2$.

## Ende der Algebra.

An=

# Anwendung der Algebra auf die Rechenkunst.

# Vorbericht.

§. 1.

Es ist ein wirklicher Unterschied zwischen der Algebra, und derselben Anwendung, wie zwischen der Grammatick, und den Uebungen, die nach derselben Regeln ausgearbeitet worden sind, wie zwischen der Logik, und den Ausarbeitungen, die nach derselben Anweisung gemacht worden sind. Die Algebra zeiget uns nichts anders, als wie man sich eine Regel machen muß, nach welcher man eine gewisse Größe, oder ihre Eigenschaften finden kann, von welcher uns einige Eigenschaften gegeben worden sind. Die Anwendung aber der Algebra auf die Rechenkunst ist nichts anders, als eine Sammlung allerley Uebungen oder Exempel, die nach den Regeln der Algebra ausgearbeitet, und ausgeführet worden sind.

§. 2.

Die Eigenschaften, die von einigen Zahlen gesucht werden, sind so beschaffen, daß sie nur einer einzigen, oder sehr vielen Zahlen zukommen können. Vermittelst der Eigenschaften, die nur einer Zahl zukommen können, können wir sehr leicht die Zahl selbst finden. Vermittelst aber derjenigen Eigenschaften, die mehreren Zahlen zukommen können, können wir uns mehrere Zahlen be-

kannt machen. Die Aufgaben, die solche Eigenschaften einer Zahl suchen, die nur einer Zahl zukommen, werden bestimmte Aufgaben genannt. Die Aufgaben aber, die die Eigenschaften suchen, die mehreren Zahlen zukommen, werden unbestimmte Aufgaben genannt: Z. E. Man verlangt die Zahl zu wissen, deren dritter Theil um 2. größer ist, als der vierte Theil. Diese ist eine bestimmte Aufgabe. Denn, man sucht solche Eigenschaften einer Zahl, die nur einer Zahl zukommen können. Man verlangt zu wissen, wie die Zahlen beschaffen seyn müßen, deren Summe so groß ist, als der Quotient, der entstehet, wenn man das Quadrat von der Differenz der zwey gegebenen Zahlen mit der kleineren dividiret. Diese Aufgabe ist eine unbestimmte Aufgabe, denn sie suchet solche Eigenschaften der Zahlen, die mehreren zukommen können.

§. 3.

Die Anwendung der Algebra auf die Rechenkunst läßt sich also füglich in zwey Theile theilen. Der erste Theil soll die bestimmte, der zweyte die unbestimmte Aufgaben enthalten. Wir wollen die Abtheilung behalten, und gleich zu derselben Abhandlung schreiten.

Die

# Die Abhandlung der Anwendung der Algebra auf die Rechenkunst.

## Der I. Theil.

### Enthaltend die bestimmte Aufgaben.

---

§. 4.

Die bestimmten Aufgaben sind zwiefach, sie sind allgemeine oder besondere Aufgaben. (Alg. §. 43 ) Denn sie geben uns die Eigenschaften der Zahlen entweder ausdrücklich, ob man sie nämlich addiren, oder subtrahiren 2c. soll, oder es wird dieses nicht angegeben, sondern man muß es durchs Nachdenken entdecken. Wir wollen also den ersten Theil in zwey Kapitel abtheilen, und in dem ersten die allgemeine, in dem zweyten die besondere Aufgaben vortragen.

# Das I. Kapitel.

## Enthaltend die bestimmte allgemeine Aufgaben.

### Die 1. Aufgabe.

§. 5. Eine Zahl zu finden, daß 3 = d herauskomme, wenn man zu der Zahl 6 = a addiret, die Summe mit 2 = b dividiret, und von dem Quotienten noch 4 = c subtrahiret.

### Auflösung.

1. Benennung. Es sey die Zahl = x. Wenn man ihr das a addiret, kommet heraus x + a. Wenn man dieses mit b dividiret, kommet heraus $\frac{x+a}{b}$. Wenn man von dem Quotienten c subtrahiret, kommet heraus $\frac{x+a}{b} - c$.

2. Gleichung. Vermög der Aufgabe soll jetzund d herauskommen, oder, welches eben so viel ist. Das obige soll dem d gleich seyn, folglich

x + a

$$\frac{x+a}{b} - c = d.$$

3. Reduction

$$\frac{x+a}{b} - c = d.$$

M. b.

$$x + a - bc = bd$$

A. bc.

$$x + a = bd + bc$$

S. a.

$$x = bd + bc - a.$$

$$\frac{x+6}{2} \qquad \tfrac{1}{2}x + 3$$

4. Subtr.

$$\tfrac{1}{2}x - 1 = 3$$

$$x - 2 = 6$$

$$+2 \quad +2$$

$$x = 8$$

4. Application.

Es ist $a = 6.$

$b = 2.$

$c = 4.$

$d = 3.$

So ist $bd = 6.$

$bc = 8.$

$bd + bc = 14.$

$bd + bc - a = 8.$

Also ist $x = 8.$

Probe.

$8 + 6 = 14.$

$$\frac{14}{2} = 7.$$

$7 - 4 = 3.$

§. 6.

Die 1. Anm. Man kann dem bekannten Buchstaben a b c d eine Bedeutung geben, die man will, und um sich das x bekannt zu machen, ist nichts mehr nöthig zu thun, als die blosse Application.

Hätten wir statt der Buchstaben die Zahlen beybehalten, so hätten wir eine Gleichung und die Reduction machen müßen. Und hieraus sehen wir auch die Vortheile die mit den Buchstaben verbunden sind. Es sey z. E. $a = 8$. $b = 8$. $c = 8$. $d = 8$. So ist $bd = 64$. $bc = 64$. $bd + bc = 128$. $bd + bc - a = 120$. Also ist $x = 120$. Die Probe.

$$x + a = 128. \frac{x+a}{b} = \frac{128}{8} = 16. 16 - 8 = 8.$$

Es ist also richtig.

## §. 7.

Die 2. Anm. Die Aufgabe also konnte folgendermaßen eingerichtet werden. Eine Zahl zu finden, daß 8. herauskomme, wenn man zu der Zahl 8. addiret, die Summe davon mit 8. dividiret, und noch von dem Quotienten 8. subtrahiret.

## §. 8.

Die 3. Anm. Ich erinnere dieses einmal für allemal, daß man anstatt der bekannten Buchstaben, Zahlen annehmen könne, die man nur immer annehmen will, und den Anfängern rathe ich dieses sehr oft zu versuchen.

# Die 2. Aufgabe.

## §. 9.

**Eine Zahl zu finden derer dritter $= a$ Theil um 4. $= b$ ist größer als der fünfte $= c$ Theil.**

Auf-

## Auflösung.

1. Benennung. Es sey die Zahl x. so ist ihr dritter = a Theil $\frac{x}{a}$ und der fünfte = c Theil $\frac{x}{c}$.

2. Gleichung. Dieses $\frac{x}{a}$ ist um 4 = b größer als $\frac{x}{c}$. Wenn man also von $\frac{x}{a}$ subtrahiret b, kommet $\frac{x}{c}$ heraus. Folglich

$$\frac{x}{a} - b = \frac{x}{c}.$$

$$\frac{1}{3}x - 4 = \frac{1}{5}x$$

$$x - 12 = \frac{1}{5}x$$

$$5x - 60 = 3x$$

$$2x - 60 = 0$$

$$2x = +60$$

$$x = 30.$$

### 3. Reduction.

$$\frac{x}{a} - b = \frac{x}{c}$$

M. a.

$$x - ab = \frac{ax}{c}$$

M. c.

$$cx - abc = ax$$

A. abc.

$$cx = ax + abc$$

S. ax.

$$cx - ax = abc$$

D. c — a.

$$x = \frac{abc}{c-a}.$$

### 4. Application.

Es ist $a = 3$

$b = 4$

$c = 5$

So ist

$abc = 60$

$c - a = 2$

$$\frac{abc}{c-a} = 30.$$

Folglich $x = 30$.

### Probe.

$$\frac{30}{3} = 10$$

$$\frac{30}{5} = 6$$

$$10 - 4 = 6.$$

## Die 3. Aufgabe.

§. 10

Eine Zahl zu finden, wenn man zu ihr ihre Hälfte addiret, davon ihren dritten = b Theil subtrahiret, so kommet die ganze Zahl heraus, und noch 2 = c darüber.

### Auflösung.

1. Benennung. Es sey die Zahl x, so ist ihre Hälfte $\frac{x}{2}$, oder $\frac{x}{a}$ ihr dritter Theil $\frac{x}{3}$ oder $\frac{x}{b}$ die ganze Zahl, und c ist $x + c$.

2. Gleichung. Man muß vermög der Aufgabe zum x das $\frac{x}{a}$ addiren, kommet $x + \frac{x}{a}$ heraus, davon $\frac{x}{b}$ subtrahiren, kommet $x + \frac{x}{a} - \frac{x}{b}$ heraus; dieses soll gleich seyn dem $x + c$, folglich $x + \frac{x}{a} - \frac{x}{b} = x + c$.

3. Reduction.

$$x + \frac{x}{a} - \frac{x}{b} = x + c.$$

M a.

$$ax + x - \frac{ax}{b} = ax + ac$$

M. b.

$$abx + bx - ax = abx + abc$$

S. abx.

$$abx - abx + bx - ax = abc$$

K.

$$bx - ax = abc$$

D. b − a.

$$x = \frac{abc}{b-a}.$$

4. Applicat.

Es sey

$a = 2$

$b = 3$

$c = 1.2$

So ist

$abc = 6\ 12$

$b - a = 1$

$$\frac{abc}{b-a} = 6.\ 12$$

Folglich

$x = 6.\ 12.$

Probe.

Diese ist leicht zu machen.

$x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = x + 2$

$2x + x - \frac{1}{3}x = 2x + 4$

$6x + 3x - 2x = 6x + 12$

$7x = 6x + 12$

$x = 12.$

## Die 4. Aufgabe.

### §. 11.

Eine Zahl zu finden, wenn man zu ihr 5 = a addiret, so kommet das heraus, was herauskommt, wenn man von der 3.fach Zahl ~~6~~ 5 = b subtrahiret.

### Auflösung.

1. Benennung. Es sey die Zahl x. Wenn man ihr a addiret, kommet $x + a$ heraus. Wenn man von ihr b subtrahiret, kommet $x - b$ heraus.

2. Gleichung. $x + a = b - x$.

| 3. Reduction. | 4. Application | Probe. |
|---|---|---|
| $x + a = b - x$ | Es sey | $5 + 5 = 10.$ |
| ——— A. x. | $a = 5$ | $15 - 5 = 10$ |
| $x + x + a = b$ | $b = 15.$ | $x + 5 = 3x - 5$ |
| ——— S. a. | So ist | $+5 \quad +5$ |
| $x + x = b - a$ | $b - a = 10.$ | $x + 10 = 3x$ |
| ——— K. | | $-x \quad -x$ |
| $2x = b - a$ | $\frac{b-a}{2} = 5.$ | $10 = 2x$ |
| ——— D. 2. | Folglich ist | $5 = x$ |
| $x = \frac{b-a}{2}.$ | $x = 5.$ | |

## Die 5. Aufgabe.

### §. 12.

Eine Zahl zu finden, wenn man ihr 12 = a addiret, so kömmt das heraus, welches entstehet, wenn man die Zahl mit 3 = b multipliciret.

### Auflösung.

1. Benennung. Es sey die Zahl x. Wenn ich ihr a addire, kommt $x + a$ heraus, wenn ich sie mit b multiplicire, kommt $bx$ heraus.

2. Gleichung. $x + a$ soll = seyn $bx$.

3. Reduction.

$$x + a = bx$$

S. x.

$$a = bx - x.$$

$$a = bx - 1x.$$

D. b — 1.

$$\frac{a}{b-1} = x.$$

$x + 12 = 3x$
$-x \quad -x$
2) $12 = 2x$
$6 = x$

| 4. Application. | Probe. |
|---|---|
| Es sey | $6 + 12 = 18.$ |
| $a = 12$ | $3,6 = 18.$ |
| $b = 3.$ | |
| So ist | |
| $b - 1 = 2.$ | |
| $\frac{a}{b-1} = 6.$ | |
| Folglich ist | |
| $x = 6.$ | |

## Die 6. Aufgabe.

§. 13.

Eine Zahl zu finden, wenn man von ihr $12 = a$. subtrahiret, so kömmt eben das heraus, was herauskömmt, wenn man die Zahl mit $3 = b$ dividiret.

### Auflösung.

1. Benennung. Es sey die Zahl x. Wenn man von ihr a subtrahiret, kömmt $x - a$ heraus. Wenn man sie mit b dividiret, kömmt $\frac{x}{b}$ heraus.

2. Gleichung. So ist $x - a = \frac{x}{b}$.

3. Reduction.

$$x - a = \frac{x}{b}$$

M. b.

$$bx - ba = x$$

A. ba.

$$bx = ba + x$$

S. x.

$$bx - x = ba$$

$$bx - 1x = ba$$

D. b — 1.

$$x = \frac{ba}{b - 1}.$$

$$x - 12 = \frac{1}{3}x$$

$$3x - 36 = x$$

$$+36$$

$$3x = x + 36$$

$$-x \quad -x$$

$$2x = 36$$

$$x = 18.$$

4. Application.

Es sey

$a = 12$

$b = 3.$

So ist

$ab = 36.$

$b - 1 = 2.$

$$\frac{ba}{b - 1} = 18.$$

Folglich

$x = 18.$

Probe.

$18 - 12. = 6.$

$$\frac{18}{3} = 6.$$

Die

## Die 7. Aufgabe.

§. 14.

Zwey Zahlen zu finden, die 8 = a ausmachen, wenn man sie zusammen addiret, und bleiben 2 = b übrig, wenn man sie von einander subtrahiret.

### Auflösung.

1. Benennung. Es sey die eine x, die andere y. Wenn man sie zusammen addiret, kömmt x + y heraus. Wenn man sie von einander subtrahiret, kömmt x — y.

2. Gleichung. Vermöge der Aufgabe ist $x + y = a$. $x - y = b$.

3. Reduction.

$x + y = a$ ——— S. y. $x - y = b$ ——— A. y.

$x = a - y$ $x = b + y$.

$a - y = b + y$

——— A. y.

$a = b + y + y$

——— S. b.

$a - b = y + y$

——— R.

$a - b = 2y$

——— D. 2.

$$\frac{a - b}{2} = y.$$

X+y=8 | X−y=2
X=8−y | X=y+2
X=2+y
2X=10
X=5
consq. y=3

| 4. Application. | Probe. |
|---|---|
| Es sey | $5 + 3 = 8.$ |
| $a = 8$ | $5 - 3 = 2.$ |
| $b = 2.$ | |
| So ist | |
| $a - b = 6.$ | |
| $\frac{a-b}{2} = 3.$ | |
| Folglich | |
| $y = 3$ | |
| $x = a - y$ | |
| $x = 5.$ | |

## Die 8. Aufgabe.

§. 15.

Zwey Zahlen zu finden die $5 = a$ ausmachen, wenn man sie zusammen addiret. Und $6 = b$ wenn man sie mit einander multipliciret.

### Auflösung.

1. Benennung. Es sey die eine x, die andere y. Wenn man sie zusammen addiret, kömmt $x + y$ heraus. Wenn man sie mit einander multipliciret, kömmt $x\,y$ heraus.

2. Gleichung. So ist vermöge der Aufgabe.

$$x + y = a \qquad xy = b$$

S. y. D. y.

$$x = a - y \qquad x = \frac{b}{y}$$

$$a - y = \frac{b}{y}$$

M. y.

$$ay - y^2 = b.$$

A. $\frac{a^2}{4}$

$$y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - b.$$

W.

$$y - \frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}$$

A. $\frac{a}{2}$

$$y = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)} + \frac{a}{2}$$

4. Application.

Es sey

$a = 5$

$b = 6.$

Probe.

$2 + 3 = 5.$

$2,\ 3 = 6.$

So

So ist

$$\frac{a^2}{4} = \frac{25}{4}.$$

$$\frac{a^2}{4} - b = \frac{r}{4}$$

$$\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)} = \frac{r}{2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)} + \frac{a}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Folglich

$y = 3.$

$x = 2.$

---

## Die 9. Aufgabe.

§. 16.

Drey Zahlen zu finden, derer die zweyte um 1. größer ist, als die erste, und die dritte ist wiederum um 1. größer, als die zweyte. Die Quadrata aber der beyden ersten zusammen genommen, sollen gleich seyn dem Quadrato von der dritten.

### Auflösung.

1. Benennung. Es sey die erste x, so ist die andere x + 1, und die dritte x + 2. Das Qua-

Quadrat von der ersten ist $x^2$, von $x + 1$ ist $x^2 + 2x + 1$. Das Quadrat von $x + 2$ ist $x^2 + 4x + 4$.

2. Gleichung. Vermöge der Aufgabe ist $x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4$.

3. Reduction.

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4.$$

——————————————— S. $x^2$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 - x^2 = 4x + 4.$$

——————————————— S. $4x$.

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 - x^2 - 4x = 4.$$

——————————————— K.

$$x^2 - 2x + 1 = 4.$$

——————— W.

$$x - 1 = 2.$$

——————— A. 1.

$$x = 2 + 1 = 3.$$

4. Application.

So ist
die erste $= 3$.
die zweyte $= 4$.
die dritte $= 5$.

Probe.

$3^2 + 4^2 = 5^2$
$9 + 16 = 25$.

## Die 10. Aufgabe.

§. 17.

Vier Zahlen zu finden, derer die zweyte um 1 größer ist, als die erste, die dritte

um 1. größer als die zweyte, die vierte um 1. größer als die dritte. Und die Cubi von den drey ersten zusammen genommen sollen gleich seyn dem Cubo von der vierten.

### Auflösung.

1. Benennung. Es sey die erste x, so ist die zweyte $x + 1$, die dritte $x + 2$, und die vierte $x + 3$. Der Cubus von x ist $x^3$

von $x + 1$. ist $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

von $x + 2$. ist $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

von $x + 3$. ist $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$.

2. Gleichung. Die Summe von den ersten drey Cubis ist gleich dem Cubo von der vierten. Folglich $3x^3 + 9x^2 + 15x + 9 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$.

3. Reduction.

$$3x^3 + 9x^2 + 15x + 9 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27.$$

S. $x^3 + 9x^2 + 27x$

$$3x^3 + 9x^2 + 15x + 9 - x^3 - 9x^2 - 27x = 27.$$

R.

$$2x^3 - 12x + 9 = 27.$$

S. 9.

$$2x^3 - 12x = 18$$

D. 2.

$$x^3 - 6x = 9 = 3, 3.$$

Es sey $x = 3$.

So ist $x^3 = 27$.

$6x = 18$.

$x^3 - 6x = 9$.

Probe.

$3^3 = 27$

$4^3 = 64$

$5^3 = 125$

$6^3 = 216$.

Folg-

Folglich ist

$x = 3$.

Die zweyte Zahl 4.

Die dritte 5.

Die vierte 6.

## §. 18.

### Ich will einige Exempel ohne aller Auflösung zur Uebung beysetzen.

I. Eine Zahl zu finden, wenn man sie mit ihrem vierten Theil mulpliciret, so soll die Zahl selbst herauskommen. Antwort. Die Zahl ist 4.

II. Eine Zahl zu finden, wenn man sie mit ihrem 16ten Theil dividiret, so soll das Quadrat von der Zahl herauskommen. Antw. Die Zahl ist 4.

III. Eine Zahl zu finden, wenn man zu ihr ihre Hälfte addiret, so soll das Product herauskommen, welches aus ihr und ihrer Hälfte entstehet. Antw. Die Zahl ist 3.

IV. Eine Zahl zu finden, wenn man von ihr ihren dritten Theil subtrahiret, so soll der Quotient herauskommen, der entstehet, wenn man die Zahl mit ihrem vierten Theil dividiret. Antw. Die Zahl ist 6.

V. Eine Zahl zu finden, wenn man sie mit ihrem achten Theil dividiret, so soll der Cubus von der Zahl selbst herauskommen, Antw. Die Zahl ist 2.

VI. Eine Zahl zu finden, wenn man ihre Hälfte mit ihrem achten Theil dividiret, so soll ihr Quadrat herauskommen. Antw. Die Zahl ist 2.

VII. Eine Zahl zu finden, deren Cubus ihrem dreyfachen Quadrato gleich ist. Antw. Die Zahl ist 3.

VIII. Eine Zahl zu finden, wenn man sie mit ihrem vierten Theil multipliciret, so kömmt von einer gewissen Zahl ein Quadrat heraus, wenn man sie aber mit 3. Sechstheilchen der Zahl multipliciret, so kömmt der Cubus von der dritten Zahl heraus. Antw. Die Zahl ist 2.

IX. Eine Zahl zu finden, wenn man zu ihr ihre Hälfte addiret, so kommet ihr Quadrat heraus. Antw. Die Zahl ist $\frac{3}{2}$.

X. Eine Zahl zu finden, deren Hälfte und der dritte Theil zusammen genommen um 19. größer ist als ihr fünfter Theil. Antw. Die Zahl ist 30.

XI. Womit soll man die Zahl 4. dividiren, daß der Divisor mit dem Quotiente zusammen genommen auch 4. ausmachen möchte? Antw. Mit 2.

XII. Was soll man von der Zahl 6 subtrahiren, wenn die Differenz mit der Zahl selbst 6 zusammen genommen ein Quadrat von der subtrahirten Zahl ausmachen soll? Antw. 3.

XIII. Womit soll man die Zahl 6 multipliciren, wenn das Product dem Quadrato von der Differenz der beyden Factoren weniger 4. gleich seyn soll? Antw. 16.

XIV. Was soll man von der Zahl 12. subtrahiren, wenn die Zahl 12 und die Differenz zusammen genommen 3 mal größer seyn soll als die Differenz? Antw. 6.

XV. Eine Zahl zu finden, wenn man die Zahl mit sich selbst multipliciret, dazu noch die Zahl selbst addiret, so ist dieses alles zusammen genommen nur zweymal so groß als die Zahl selbst. Antw. die Zahl ist 1.

XVI Zwey Zahlen zu finden, wenn man sie zusammen addiret, kommet heraus 6. Wenn man ihre Quadrata von einander subtrahiret, kommet heraus 12. Antw. Die eine ist 4. die andere 2.

XVII. Zwey Zahlen zu finden, wenn man sie zusammen addiret, kommet heraus 14. Wenn man die größere durch die kleinere dividiret, kommet heraus 6. 12. und 2.

XVIII. Zwey Zahlen zu finden, wenn man sie von einander subtrahiret, kommet heraus 2. Wenn man sie mit einander multipliciret, kommet heraus 15. Anw. Die eine ist 5. Die andere 3.

XIX. Zwey Zahlen zu finden, die 4. zur Differenz, und 3. zum Quotienten haben. Antw. Die eine ist 6. Die andere 2.

XX. Zwey Zahlen zu finden, derer Product ist 12. und der Quotient 3. Antw. Die eine ist 6. die andere 2.

XXI. Zwey Zahlen zu finden, derer Summe ist 5. und die Summe ihrer Quadratorum 13. Antw. Die eine ist 3. Die andere 2.

XXII. Die Zahl 40. in zwey Factores zu theilen, derer einer um 3. größer ist als der andere. Antw. Der eine ist 8. Der andere 5.

XXIII. Die Zahl 54. in zwey Factores zu theilen, derer einer 6 mal so groß ist, als der andere. Antw. Der eine ist 3. Der andere 18.

XXIV. Zwey Zahlen zu finden, derer Summe ist 5. und die Differenz ihrer Quadratorum auch 5. Die eine ist 3. Die andere 2.

XXV. Zwey Zahlen zu finden, wenn man zu ihrer Summe ihre Differenz addiret, so kömmt ihr Product heraus. Wenn man aber von ihrer Differenz noch die kleinere subtrahiret, so kömmt heraus ihr Quotient. Antw. Die eine ist 8. Die andere 2.

XXVI. Zwey Zahlen zu finden, die sich arithmetisch, und geometrisch so verhalten, wie 8. zu 2. Antw. Die eine ist 8. Die andere 2.

XXVII. Was soll man zu der Zahl 10 addiren, und von ihr subtrahiren, wenn die Summe 3 mal so groß seyn soll, als die Differenz, und die Zahl, die man addiren soll, soll mit der Zahl, die man subtrahiren muß, zusammen genommen 2 mal so groß seyn, als die Zahl 10? A. Die Zahl, die man addiren muß, ist 20. die man subtrahiren muß, ist 0.

XXVIII. Was soll man zu der Zahl 8. addiren, und womit soll man sie multipliciren? Wenn das Product 6 mal so groß seyn soll, als die Summe und die Differenz dieser zwey Zahlen, soll der Hälfte der Zahl 8. gleich seyn? A. Man muß zu ihr 8. addiren, sie mit 12. multipliciren.

XXIX Womit soll man die Zahl 2. multipliciren, und womit soll man sie dividiren? Wenn die Summe von dem Product und dem Quotienten den Cubum von der Zahl 2. Die Differenz aber zwischen dem Product und dem Quotienten das Quadrat von der Zahl 2. ausmachen soll. Antw. Die Zahl, mit der man multipliciren soll, ist 3. Mit der man dividiren soll, ist 1.

XXX. Drey Zahlen zu finden, derer Summe ist 9. ihr Product 24. und die Differenz der zwey ersten 1. Antw. Die erste ist 4. Die zweyte 3. Die dritte 2.

Das

# Das II. Capitel.

## Enthaltend die besondere bestimmte Aufgaben.

### Die 1. Aufgabe.

§. 19.

Vier Potentaten treten in eine Allianz um einem mächtigen Feinde zu widerstehen. Der erste giebt alle seine Truppen dazu. Der zweyte giebt auch so viele, und noch 1000 = a darüber. Der dritte giebt so viel als diese beyde, und noch 3000 = b darüber. Der vierte giebt 50000 = c, und also so viel, als diese drey erstere. Nun ist die Frage, wie viel hat ein jeder gegeben?

Auflösung.

I. Benennung. Setzet, daß der erste x gegeben habe, so hat der zweyte $x + a$, und der dritte $x + x + a + b$ gegeben.

II. Gleichung. Dieses alles zusammen genommen soll so groß seyn, als das, was der vierte gegeben. Folglich $x + x + a + x + x + a + b = c$. K. $4x + 2a + b = c$.

### III. Reduction.

$$4x + 2a + b = c$$

$$\overline{\phantom{4x + 2a + b = c}} \quad \text{S. } 2a + b.$$

$$4x = c - 2a - b$$

$$\overline{\phantom{4x = c - 2a - b}} \quad \text{D. } 4.$$

$$x = \frac{c - 2a - b}{4}$$

### IV. Application.

Es ist

$a = 1000.$

$b = 3000.$

$c = 50000.$

So ist

$x = 11258.$

Es hat also gegeben

| | |
|---|---|
| Der erste | 11250. |
| Der zweyte | 12250. |
| Der dritte | 26500. |
| | 50000. |
| Der vierte | 50000. |

## Die 2. Aufgabe.

§. 20.

Drey werden zu Erben eines ansehnlichen Vermögens eingesetzt. Der erste bekömmt vermöge des Testaments die Hälfte, der zweyte den dritten = b Theil. Und der dritte den achten = c Theil, und noch

200.

200 = d. Rthl. darüber. Wie groß war das Vermögen? Und wie viel hat ein jeder erhalten?

### Auflösung.

I. Benennung. Setzet, das Vermögen wäre = x. So hat der erste $\frac{x}{2}$ oder $\frac{x}{a}$ der zweyte $\frac{x}{b}$ und der dritte $\frac{x}{c} + d.$ erhalten.

II. Gleichung. Dieses alles soll dem ganzen Vermögen, und folglich dem x gleich seyn. Folglich $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} + d = x.$

III. Reduction.

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} + d = x$$

M. a.

$$x + \frac{ax}{b} + \frac{ax}{c} + ad = ax.$$

M. b.

$$bx + ax + \frac{abx}{c} + abd = abx$$

M. c.

$$bcx + acx + abx + abcd = abcx.$$

S.

$$abcd = abcx - bcx - acx - abx$$

D.

$$\frac{abcd}{abc - bc - ac - ab} = x.$$

IV. Application.

Es ist

$a = 2.$
$b = 3.$
$c = 8.$
$d = 200.$

So ist

$abcd = 9600.$
$abc - bc - ac$
$- ab = 2.$

Folglich

$x = 4800.$

Es bekam also

| | |
|---|---|
| Der erste | 2400. |
| Der zweyte | 1600. |
| Der dritte | 800. |
| Probe | 4800. |

Die 3. Aufgabe.

§. 21.

Franciscus und Michael zählen ihre Gelder. Franciscus sagt zum Michael: wenn

sie

sie mir 4 = a Rthlr. von ihrem Gelde überlassen, so haben wir alle beyde gleich viel; Michael antwortet ihm: Und wenn sie mir 8 = b. Rtl. von ihrem Gelde überlassen, so habe ich 5 = c mal so viel als Sie. Nun ist die Frage, wie viel hat der Franciscus und Michael gehabt?

## Auflösung.

I. Benennung. Setzet, daß der Franciscus x, und der Michael y gehabt habe. Giebt nun Michael dem Franciscus a Rtl. so ist sein Geld $y - a$, und der Franciscus hat $x + a$. Giebt aber der Franciscus dem Michael b. Rtl. so behält er $x - b$, und der Michael $y + b$.

II. Gleichung. Folglich ist $x + a = y - a$, und $x - b = \frac{y + b}{c}$.

$x+4=y-4 \quad x=y-8$

$x-8=\frac{y+8}{5} \quad x=8+\frac{y+8}{5}$

$y-8=8+\frac{y+8}{5}$

$+8 \quad +8$

$y=16+\frac{y+8}{5}$

$5y=80+y+8$

$-y$

$4y=88 \quad y=22 \quad x=14$

III. Re

III. Reduction.

$$x + a = y - a$$
— S. a
$$x = y - a - a.$$
— K.
$$x = y - 2a$$

$$x - b = \frac{y + b}{c}$$
— M. c.
$$xc - bc = y + b.$$
— A. bc.
$$xc = y + b + bc$$
— D. c.
$$x = \frac{y + b + bc}{c}.$$

---

$$y - 2a = \frac{y + b + bc}{c}$$
— M. c
$$yc - 2ac = y + b + bc$$
— S. y.
$$yc - y - 2ac = b + bc$$
— A. 2ac.
$$yc - y = 2ac + bc + b.$$
— D. c — 1.
$$y = \frac{2ac + bc + b}{c - 1}.$$

IV. Application.

Es ist
$a = 4.\ b = 8.\ c = 5.$ So ist $y = 22.$ und $x = 14.$ Die Probe ist leicht zu machen.

## Die 4. Aufgabe.

### §. 21.

Einer reiset, und verzehret auf seinen Reisen sein gantzes Vermögen. In dem ersten Lande verzehret er 1000 = a und noch den dritten = b Theil darüber von dem übrigen. In dem zweyten Lande verzehret er 2000 = 2 a und wiederum den dritten = b Theil von dem übrigen darüber, u. s. w. Zuletzt war sein Vermögen zu Ende, und er befand, daß er in einem jeden Lande gleich viel verzehret hatte. Nun ist die Frage: wie groß war sein Vermögen? Und wie viel Länder hat er besehen?

### Auflösung.

I. Benennung. Es sey das Vermögen = x, und die Anzahl der Länder, die er besuchte = y. So hat er in dem ersten Lande

$$a + \frac{x - a}{b}$$

und in dem zweyten Lande

$$2a + \frac{x - 3a - \frac{x + a}{b}}{b}$$

verzehret.

II. Gleichung. Weil das, was er in dem ersten Lande verzehrte, gleich ist dem,

was

was er in dem zweyten Lande verzehrte; so ist $a + \frac{x-a}{b} = 2a + \frac{x - 3a - \frac{x+a}{b}}{b}$.

Und weil er in einem jeden Lande gleich viel verzehrte, so ist $ay + \frac{xy - ay}{b} = x$.

III. Reduction.

$$a + \frac{x-a}{b} = 2a + \frac{x - 3a - \frac{x+a}{b}}{b}$$

M. b.

$$ab + \frac{xb - ab}{b} = 2ab + x - 3a - \frac{x+a}{b}$$

M. b.

$$ab^2 + \frac{xb^2 - ab^2}{b} = 2ab^2 + xb - 3ab - x + a$$

K.

$$ab^2 + xb - ab = 2ab^2 + xb - 3ab - x + a$$

A. S.

$$xb - xb + x = 2ab^2 - 3ab + a - ab^2 + ab$$

K.

$$x = ab^2 - 2ab + a.$$

IV. Application

Es ist $a = 1000.$

$b = 3.$

So ist

$x = 4000.$

---

$$ay + \frac{xy - ay}{b} = x$$

M. b.

$$aby + xy - ay = bx$$

D.

$$y = \frac{bx}{ab + x - a.}$$

Weil $a = 1000.$

$b = 3.$

$x = 4000.$

So ist

$y = 2.$

Es bestund also sein Vermögen aus 4000 Rth. und hat er 2. Länder besehen.

## Die 5. Aufgabe.

### §. 22.

Einem begegnen einige Bettler, die ihn um ein Almosen ansprachen. Er antwortet ihnen: Wäret ihr nur eine halbe Stunde früher gekommen, so hätte ich einem jeden

den zu 3 $=$ a gr. geben können, denn ich habe allererst 2 $=$ c. Rtl. ausgegeben, und hätte doch noch 8 $=$ b gr. übrig behalten. Nun kann ich euch nichts mehr als zu 2 $=$ d gr. geben, und so bleibet mir nicht einmal ein Heller übrig. Nun ist die Frage: Wie viel Bettler sind da gewesen? Und wie viel Geld hat er zuletzt gehabt?

## Auflösung.

I. Benennung. Setzet, der Bettler sind y, und des Geldes x gr. gewesen.

II. Gleichung. Hätte er einem jeden zu d. gr. gegeben, so wäre ihm nichts übrig geblieben. Folglich $dy = x$. Vorhero hatte er $x + c$. und wenn er einem jeden zu a gr. gegeben hätte, so hätte er doch noch b gr. übrig behalten. Folglich $ay = x + c - b$.

III. Reduction.

$x = dy$

$ay = x + c - b$

S. c.

$ay - c = x - b$

A. b.

$ay - c + b = x.$

$dy = ay - c + b$

———————— A. c.

$dy + c = ay + b.$

———————— S. b.

$dy + c - b = ay$

———————— S. dy.

$c - b = ay - dy$

———————— D. a — d.

$$\frac{c - b}{a - d} = y.$$

Rth. ist 24 gr:

IV. Application.

Es ist $a = 3$. $b = 8$. $c = 2$. Rtl. oder 48. gr. $d = 2$. So ist $y = 40$. und $x = 80$. Es sind also 40. der Bettler gewesen, und hatte 2. Rtl. und 8. gr. am Gelde. Die Probe ist leicht zu machen.

---

## Die 6. Aufgabe.

§. 23.

Ein Commendant wird gefragt, wie viel er Soldaten in der Festung hätte. Er antwortet: Ich habe $3 = a$ mal so viel zu Fuß als zu Pferde, und diese alle zusammen genommen sind $4 = b$ mal so viel über $2000 = c$ als die Reuter unter $2000 = c$. Nun ist die Frage, wie viel Reuter und Fußvölker er hatte?

## Auflösung.

I. **Benennung.** Setzet, er habe x zu Fuß, und y zu Pferde gehabt: so ist, weil er a mal so viel zu Fuß als zu Pferde hatte, der a Theil vom $x = y$.

Folglich $\frac{x}{a} = y$. Der Reuter unter c sind so viel gewesen $c - y$. und alle zusammen genommen so viele über c. $x + y - c$. Dieses ist aber b mal so viel als $c - y$. Folglich $\frac{x + y - c}{b} = c - y$.

II. **Gleichung.** Diese ist schon angegeben.

III. **Reduction.**

$$\frac{x}{a} = y \qquad \frac{x + y - c}{b} = c - y$$

M. a. ——— M. b.

$$x = ay \qquad x + y - c = bc - by$$

S. y. A. c.

$$x = bc - by - y + c$$

$$ay = bc - by - y + c$$

A. by + y.

$$ay + by + y = bc + c$$

D. a + b + 1.

$$y = \frac{bc + c}{a + b + 1}.$$

IV. Ap-

IV. Application.

Es ist

a = 3.

b = 4.

c = 2000.

So ist

y = 1250

x = 3750.

Probe

Es ist offenbar, daß 3750. 3 mal so groß sey als 1250. Addiret 1250. und 3750. zusammen, kommen heraus 5000. Wenn man 2000. von 5000. subtrahiret, bleiben 3000. übrig. Wenn man 1250. von 2000. subtrahiret, bleiben 750. übrig, und also 4 mal so klein als 3000. Es sind also der Fußvölker 3750, und der Reuter 1250. gewesen.

## Die 7. Aufgabe.

### §. 24.

Ein Herr nimmt in Dienste einen Diener, und verspricht ihm zu seinem jährlichen Lohn ein ganzes Kleid und 32 = b Rtl. Nachdem er so viele Wochen gedienet hatte als das Kleid Rtl. kostete, bat er um seine Dimißion, die er auch nebst dem Kleid zu seinem Lohn für die Zeit, in welcher er dienete, erhielt. Nun ist die Frage,

was kostete das Kleid? Und wie viel Wochen hat er gedienet?

## Auflösung.

I. Benennung. Setzet, er habe x Wochen gedienet, folglich kostete auch das Kleid x Rtl.

II. Gleichung. Nun kann man so schliessen. Vor 52. Wochen oder a Wochen bekommt er x + b. Was bekommt er vor die x. Wochen? Antw. x. Rtl. Setzet es so $a : x + b = x : x$.

III. Reduction.

$a : x + b = x : x.$

———————— Alg. §. 59.

$x^2 + xb = xa$

———————— S. ax.

$x^2 + xb - xa = 0.$

———————— A. Alg. §. 69.

$$x^2 + xb - xa + \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{2}$$

$$= \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{2}$$

———————— W.

$$x + \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{2}\right)}$$

$$\text{S. } \frac{b}{2} \text{ A. } \frac{a}{2}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{2}\right)} + \frac{a}{2} - \frac{b}{2}.$$

IV. Application.

| Es ist | Probe |
| --- | --- |
| $a = 52.$ | $52 : 32 + 20 = 20 : 20.$ |
| $b = 32.$ | |
| So ist | |
| $x = 20.$ | |

## Die 8. Aufgabe.

§. 25.

Einer will 12 = a Ellen Tuch kaufen, er erschrickt aber, wie er den Preiß vernimmt, und sagt: vor einigen Jahren konnte ich vor das Geld, was ich bey mir habe, 3 = d mal so viel kaufen, und hätte doch

noch 24 = b Rtl. übrig behalten. Nun müßte ich noch 24 = b Rtl. dazu haben, wenn ich dieses kaufen wollte. Nun fragt es sich, wie theuer war ihm die Elle gehalten? und wie viel Geld hatte er bey sich gehabt?

Auflösung.

I. Benennung. Setzet, man hätte vor die Elle y gefordert, und er hätte x. Rtl. gehabt; so hat die Elle vorhero $\frac{y}{d}$ Rtl. gekostet.

II. Gleichung. Suchet nun nach der Regel De-Tri, was die a Ellen jetzund kosteten $1 : y = a : ay$. Allein $ay$ ist $= x + b$. Suchet ferner was sie vorhero gekostet hätten: $1 : \frac{y}{d} = a : \frac{ay}{d}$. Allein sie hätten $x - b$ gekostet. Folglich $\frac{ay}{d} = x - b$. Und $ay = x + b$.

III. Reduction.

$$ay = x + b \quad \text{S. b.}$$
$$ay - b = x$$

$$\frac{ay}{d} = x - b \quad \text{M. d.}$$
$$ay = dx - db \quad \text{A. db.}$$
$$ay + db = dx \quad \text{D. d.}$$
$$\frac{ay + db}{d} = x.$$

$$ay - b = \frac{ay + db}{d}$$ M. d.

$$ady - db = ay + db$$ A. db. S. ay.

$$ady - ay = db + db.$$ K.

$$ady - ay = 2db.$$ D. ad — a.

$$y = \frac{2db}{ad - a}.$$

IV. Application.

Es ist

$a = 12.$

$b = 24.$

$d = 3.$

So ist

$y = 6.$

$x = 48.$

Probe diese ist leicht zu machen.

---

## Die 9. Aufgabe.

### §. 26.

Ein Kaufmann vertauscht ein Stück Tuch welches 40 = a Ellen gehalten hatte gegen zwey Stücke schlechteren Tuchs. Eins von den schlechten Stücken hat 50 = b Ellen gehalten, und war von schwarzer Farbe. Das andere von den schlechten Stücken hat 30 = c Ellen gehalten und

war blau. Eine Elle von dem schwarzen kostete so viel als die Elle von dem blauen. Vor das schwarze hat er 30 = d. Ellen gegeben, und noch 40 = e Rrl. erhalten. Vor die 10. übrige hat er das blaue Stück erhalten. Nun ist die Frage, was kostete eine Elle von dem besseren? und was kostete eine Elle von dem schlechteren;

## Auflösung.

I. Benennung. Es koste die Elle von dem besseren x Rtl. und die Elle von dem schlechtern y Rtl.

II. Gleichung. $1 : x = d : dx$. Die 40 Ellen also von dem besseren kosteten $dx$. Weil er aber vor die 30 Ellen, 50 Ellen von dem schlechten und noch e Rtl. erhalten hat, so ist $dx = by + e$. Eben so. $1 : x = a - d : ax - dx$. Dieses ist aber $= c$. Folglich $ax - dx = cy$.

III. Reduction.

$$dx = by + e \quad \text{D. } d.$$

$$x = \frac{by + e}{d}$$

$$ax - dx = cy \quad \text{D. } a - d$$

$$x = \frac{cy}{a - d}$$

$$\frac{by + e}{d} = \frac{cy}{a - d}$$ M. a — d.

$$\frac{aby + ae - byd - ed}{d} = cy$$ M. d.

$$aby + ae - byd - ed = dcy$$ A. byd.

$$aby + ae - ed = dcy + byd$$ S. aby.

$$ae - ed = dcy + byd - aby$$ D.

$$\frac{ae - ed}{dc + bd - ab} = x.$$

IV. Application.

Es ist a = 40. b = 50. c = 30. d = 30. e = 40. So ist y = 1. und x = 3.

---

## Die 10. Aufgabe.

§. 27.

Ein Hauptmann stellet seine Truppen in drey Glieder, da bleiben ihm zwey übrig. Er macht die Glieder noch einmal so groß, und formiret nur zwey Glieder, da fehlen ihm aber 10. Nun ist die Frage: wie viel waren in einem Gliede? und wie viel Truppen hatte er gehabt?

## Auflösung.

I. Benennung. Setzet, es wären erstlich y Männer in einem Gliede gewesen, so waren nachhero 2y. Und die Anzahl seiner Truppen war x.

II. Gleichung. Folglich $3y = x - 2$. Und weil darauf in einem Gliede noch einmal so viele waren: so waren in einem Gliede 2y. Es waren aber 2. Glieder. Folglich $4y = x + 10$.

III. Reduction.

$3y = x - 2$ A. 2. — $4y = x + 10$ S. 10.

$3y + 2 = x$ — $4y - 10 = x$

$3y + 2 = 4y - 10$ A. 10. S. 3y.

$2 + 10 = 4y - 3y$ R.

$12 = y$.

IV. Application.

Es waren erstlich 12. in einem Gliede, und er hatte 38. Soldaten. Die Probe ist leicht zu machen.

### Die 11. Aufgabe.

§. 28.

Man will ein Kapital $= a$ in etlichen Jahren nebst den Zinsen 5. pro 100. oder, welches eben so viel ist 1 pro 20. oder 1 pro b.

be-

bezahlen, aber alle Jahr gleich viel. Es ist leicht einzusehen, daß man alle Jahr etwas mehr von dem Kapital abtragen müße, weil die Zinsen von Jahr zu Jahr kleiner werden. Nun ist die Frage, wie viel man in dem ersten, zweyten &c. Jahr von dem Kapital abtragen müße.

### Auflösung.

I. Benennung. Es sey das, was man in dem ersten Jahr von dem Kapital abtragen muß $= x$. und die Zinsen, die man von dem Kapital a in dem ersten Jahre bezahlen muß $= \frac{a}{b}$. Denn $20 : 1 = a : \frac{a}{20}$. Oder $b : 1 = a : \frac{a}{b}$. Man muß also in dem ersten Jahr bezahlen $x + \frac{a}{b}$. Nun muß man suchen, was man in dem zweyten Jahr bezahlen muß. Wir wollen erstlich suchen, wie viel die Zinsen betragen. Suchet nun durch die Regel Detri $b : 1 = a - x : \frac{a - x}{b}$. Subtrahiret darauf dieses $\frac{a - x}{b}$ von dem, was man in dem ersten Jahre bezahlen muß, nämlich von $x + \frac{a}{b}$ so kommt dasjenige heraus, was man in dem zweyten

Jahr

Jahr von dem Kapital abtragen muß. u. s. w. Ich will hier einige Jahre anführen, und zeigen, was man in jedem Jahr an Kapital und Zinsen abtragen müße, wenn das Kapital = a und die Zinsen 1 pro b. sind Das, was man bezahlen muß, beträgt.

| Im Jahr. | An Kapital. | An Zinsen. |
| --- | --- | --- |
| I. | $x.$ | $\frac{a}{b}.$ |
| II. | $x + \frac{x}{b}$ | $\frac{a - x.}{b}$ |
| III. | $x + \frac{2x}{b} + \frac{x}{b^2}$ | $\frac{a - 2x}{b} - \frac{x}{b^2}.$ |
| IV. | $x + \frac{3x}{b} + \frac{3x}{b^2} + \frac{x}{b^3}$ | $\frac{a - 3x}{b} - \frac{3x}{b^2} - \frac{x}{b^3}$ |
| V. | $x + \frac{4x}{b} + \frac{6x}{b^2} + \frac{4x}{b^3} + \frac{x}{b^4}$ | $\frac{a - 4x}{b} - \frac{6x}{b^2} - \frac{4x}{b^3} - \frac{x}{b^4}.$ |

II. Gleichung. Es ist also $5x + \frac{10x}{b} + \frac{10x}{b^2} + \frac{5x}{b^3} + \frac{x}{b^4} = a.$ Wäre das Kapital in vier Jahren zu bezahlen, so wäre $4x + \frac{6x}{b} + \frac{4x}{b^2} + \frac{x}{b^3} = a.$ Wäre das Kapital in drey Jahren zu bezahlen, so

wäre

wäre $3x + \frac{3x}{6} + \frac{x}{b^2} = a$. Wäre es in zwey Jahren zu bezahlen, so wäre $2x + \frac{x}{d} = a$.

III. Reduction. Reduciret nun dieses auf x. Ihr werdet, wenn ihr aufmerksam seyn werdet, ganz besondere Regeln entdecken, die ich hier der Kürze wegen auslassen muß.

§. 29.

Anm. Hier ist ein Beyspiel von einer Summirung der Zahlen, die in einer geometrischen Progreßion stehen. Man kann dieses noch auf eine andere Art summiren, diese aber scheint mir etwas vortheilhafter zu seyn.

§. 30.

**Hier will ich einige Aufgaben ohne aller Auflösung, blos zur Uebung und zum Vergnügen anführen.**

I. Einer wurde gefragt, wie viel er Geld habe. Er giebt zur Antwort: Ich habe mein ganzes Geld ausgeliehen, dem Mävius habe ich den dritten, dem Sempronius den vierten Theil, und dem Cajus 200. Rtl. gegeben, so ist mein ganzes Geld weg. Wie viel hat er ausgeliehen? Antw. 480.

II. Zweyhundert Soldaten, die aus Hussaren und Infanteristen bestehen, theilen eine Beute von 480 Rtl. unter sich aus. Wenn der Infanterist 2. Rtl. bekommet, so soll der Hussar 3. bekommen, und so

so wird die ganze Beute völlig aufgehen. Wie viel Hussaren, und Infanteristen waren es? Antw. 120. Infant. und 80. Hussaren.

III. Ein Fuhrmann führet einem Kaufmann 10. Centner Zucker, Caffee rc. er läßt unterwegens 45. Pf. Caffee-Bohnen verderben; er bekommt also vor seine Fracht nichts. Ein andermal führet er ihm 6. Centner, und läßt wiederum 30 Pf. Caffee-Bohnen verderben. Der Fuhrmann bekommt vor seine Fracht wiederum nichts, ja, er muß noch dem Kaufmann 2. Rtl. bezahlen. Wie hoch hat der Kaufmann 1. Pf. Caffee geschätzet? Und was sollte er vor 1. Centner bezahlen? Antw. 1. Pf. Caffee kostete 1. Gulden, und die Fracht von 1 Centner ~~2.~~ Rtl. 3 Rtl.

IV. Ein Kaufmann borgt 2000. Rtl. und verspricht anstatt der Zinsen auf ein Jahr ein Stück Tuch, welches er zum voraus giebt und 20. Rtl. Er gewinnt mit dem Gelde so viel, daß er so gleich nach 4. Monaten seine Schulden bezahlen kann, und bezahlt wirklich, und behält noch von dem Kapital ~~100.~~ 60. Rtl. weil die Zinsen nicht so viel getragen haben, als das Stück Tuch geschätzt war. Wie hoch war das Stück Tuch geschätzt? und was gab er pro Cent. Antw. Er gab 6. pro Cent. und das Stück war auf 100 Rtl. geschätzt.

V. Ein Bruder theilet mit seiner Schwester die Erbschaft, und er bekommt so viel als die Schwester. Der Bruder bekommt 3000. Rtl. und einen Garten, die Schwester aber 2000. und ein Haus. Der Bruder verlangt auch das Haus, allein die Schwester klaget. Du thust mir eine offenbare Ungerechtigkeit, denn so kriegst du zweymal so viel als ich, und noch 1500. Rtl. darüber. Wie groß war die gantze Erbschaft? Wie hoch war der Garten? Und wie hoch war das Haus geschätzet?

Antw.

Antw. Das Haus war geschätzt auf 1750. Rtl. und der Garten auf 750. Die ganze Erbschaft war 7500. Rtl.

VI. Zwey Brüder theilen die Verlassenschaft ihrer Aeltern folgendergestalt. Der ältere bekommt das Haus, der Jüngere einige Ländereyen. Nun bleibt noch ein Garten übrig. Bekommt der Aeltere auch den Garten, so bekommen beyde gleich viel, bekommt aber der Jüngere den Garten, so hat er noch einmal so viel als der Aeltere und noch 50. Rtl. darüber. Wie hoch wird das Hauß, die Ländereyen, der Garten, und die gantze Erbschaft geschätzet? Antw. Es wird geschätzt das Haus auf 1950. die Ländereyen auf 3000. Der Garten auf 1050. und die gantze Erbschaft auf 6050. Rtl.

VII. Ein Vater will ein Testament aufrichten. Er befindet, daß ihm 1000. Rtl. übrig bleiben, wenn er einem jeden Kinde 1000. Rtl. vermachet, und das ihm 1400. Rtl. fehlen, wenn er einem jeden zu 1200. Rtl. vermachen will. Nun ist die Frage: Wie viele Kinder hatte er? Und wie groß war die Erbschaft. Antw. Er hatte 12. Kinder, und 13000. Rtl. im Vermögen.

VIII. Sempronius sagt zum Titius: Gib mir von deinem Gelde die Hälfte, so habe ich noch einmal so viel als dir geblieben, und 200. Rtl. Titius antwortet ihm: Gib du mir von deinem Gelde die Hälfte, so habe ich viermal so viel als dir geblieben, und 600. Wie viel hat der Titius, und wie viel hat der Sempronius gehabt? Antw. Der Sempronius hatte 2000. Rtl. und der Titius 3600.

IX. Drey Personen miethen drey Stuben, der erste bezahlet monatlich 1. Gulden, der zweyte 1. Rtl. und der dritte 2. Rtl. Man befindet zuletzt,

daß

daß ein jeder gleich viel bezahlet habe, und daß das, was sie bezahlet haben, 48. Rtl. ausgemachet habe. Nun ist die Frage, wie lang hat ein jeder die Stube bewohnet? Antw. Der erste 2. Jahr, der zweyte 1. Jahr und 4. Monate und der dritte 8. Monate.

X. Ein Vater will eine Summe Geldes ausleihen, gleich sprechen ihn seine drey Söhne folgender Gestalt darum an. Der Aelteste sagt: Leihen sie mir so viel, als ich nöthig habe, so bleibet ihnen noch die Hälfte übrig, und noch 600. Rtl. darüber. Der Mittelste redet ihn an: Leihen sie lieber mir so viel, als ich nöthig habe, so behalten sie noch den vierten Theil übrig. Der Jüngste sagt: Geben sie mir so viel als ich nöthig habe, so behalten sie noch 1000. Rtl. übrig. Der Vater antwortet ihnen, ich will lieber einem jeden die Hälfte davon, was er verlanget geben, allein so fehlen mir noch 1025. Rtl. Nun ist die Frage: Wie groß war das Vermögen? und was verlangte ein jeder? Antw. Das Vermögen bestand in 14600. Rtl. Der Aelteste verlangte 6709. Der Mittelste 10950. Und der Jüngste 13600.

XI. Es sind drey Linien. A B C. Die Linie A ist um die Hälfte größer als die Linie B, und die Linie A ist um drey Virtel größer als die Linie C. Und die Linie A ist um 10 Schuh grösser als beyde Linien B und C zusammen genommen. Wie groß ist nun eine jede von diesen Linien? Antw. A ist 40. B 80 und C 10 Schuh lang.

XII. Ein Käufer fragt, wie viel einige Ellen Tuch kosten möchten. Der Kaufmann antwortet ihm: diese 12. Ellen nebst denen die sie kaufen wollen, kosten 60. Rtl. Sie sollen also, so viele Ellen als sie verlangen vor 24. Rtl. haben. Wie viele Ellen wollte der Käufer kaufen? Und was kostete

die

die Elle? Antw. Acht Ellen wollte er kaufen, und die Elle kostete 3. Rtl.

XIII. Einer will Geld borgen, der Kapitalist aber verlangt Zinsen, die den fünften Theil von dem Kapital ausgemacht haben, denn sprach er: von 700. weniger so vielen Rtl. als sie von mir verlangen, kann man sicher 20. Rtl. und so viel, als das Kapital beträgt, welches sie von mir verlangen, an Zinsen jetzund erhalten. Nun fragts sich, wie groß war das Kapital? Und wie viel verlangt er pro Cent? Antw. Das Kapital war 100. Rtl. und verlangt 20. pro Cent.

XIV. Einer kauft 36 Scheffel Weitzen und Gerste vor 36. Rtl. und bezahlt vor einen Scheffel Weitzen 3. Rtl. und vor einen Scheffel Gerste 1. Rtl. Wie viel hat er von beyden gekauft? Antw. 18. Scheffel Weitzen. und 12. Scheffel Gerste.

XV. Einer fallt den Raubern in die Hände, sie fragen gleich nach seinem Gelde. Er antwortet ihnen: Ich habe nichts mehr als so viel, daß ich einem jeden zu 5. Rtl. geben kann. Sie nehmen ihm noch den Degen ab, einer von ihnen behält ihn, und giebt noch 13. Rtl. heraus, so bekam ein jeder zu 7. Rtl. Der Degen war zweymal so viel Rtl. werth, als der Rauber da gewesen sind. Nun ist die Frage. Wie viele Räuber sind da gewesen? Wie viel Geld hat er gehabt? Und wie hoch war der Degen geschätzt? Antw. Es sind der Räuber 10. gewesen. Er hat 50. Rtl. gehabt. Und der Degen war auf 20. Rtl. geschätzt.

XVI. Ein Potentat will einige Truppen in Sold nehmen, er befindet, daß, wenn er die schwere Reuterey nimmt, so könnte er sie 2. Jahr erhalten. Wenn er aber die leichte Reuterey nimmt, so könnte er sie 3. Jahr erhalten. Nimmt er aber das Fußvolk, so könnte er sie 6. Jahr er-

halten. Er bedenkt sich, und nimmt alle mit einander auf einmal. Nun ist die Frage, wie lange wird er sie erhalten können. Antw. Ein Jahr.

XVII. Ein Wucherer bringt einige Malter Korn zu Markte, er siehet aber, daß er nur die Hälfte davon, was es ihn kostet, gewinnen kann. Er entschließt sich auf die Theuerung zu warten. Die Theuerung kömmt, und er gewinnt jetzund an dem Viertel so viel, als er vorhero an dem gantzen gewonnen hätte. Nun ist die Frage, wie viel bekommt er jetzund vor ein Malter, da er anfänglich nichts mehr als 6. Rtl. kriegen konnte? Antw. 12. Rtl.

XVIII. Es sind vier Gefäße A. B. C. D. Wenn man aus den A das Gefäß B füllen wollte, so bleiben in dem A $\frac{2}{3}$ übrig. Wollte man aus dem Gefäß A das Gefäß C füllen, so bleiben in dem Gefäß A $\frac{3}{4}$ übrig. Wollte man aus dem A das D füllen, so bleiben in dem A $\frac{5}{6}$ übrig. Wollte man aus den Gefäßen B C. D. das Gefaß A füllen, so ist in demselben noch für 3. Kannen Raum genug. Nun ist die Frage: Wie viel Kannen hält ein jedes von diesen Gefäßen. Antw. Es hält A. 12. B. 4. C. 3. D. 2.

XIX. Einer kauft etliche Ellen Tuch vor 16. Rtl. Eine jede Elle aber kostet so viele Rtl. als er Ellen gekauft hat. Wie viele Ellen hat er gekauft? Und wie hoch kam die Elle? Antw. Er kaufte 4. Ellen, 1. zu 4. Rtl.

XX. Ein Kaufmann kauft ein Stück Tuch. Die Hälfte davon verwahret er ins künftige, und aus dem dritten Theil läßt er vor sich, und seine Kinder Kleider machen. Der Schneider verlangt noch den vierten Theil davon, was er erhalten hat. Der Kaufmann schicket ihm dieses, und den Rest

ver-

verkauft er, und zwar eine Elle vor so viele Rtl. als der Rest Ellen hatte. Zuletzt erwirbt er so viele Rtl. als das gantze Stuck Tuch Ellen gehalten hatte. Nun ist die Frage, wie viel Ellen hatte das Stück Tuch gehalten? Und wie theuer hat er die Elle verkauft? Antw. **Das gantze Stück hat 144. Ellen gehalten Und die Elle verkaufte er vor 12. Rtl.**

XXI. Einer will 8. Ellen Tuch zum Kleide kaufen, der Kaufmann fordert davor 30. Rtl. Er dinget aber so viel, daß er vor die 30. Rtl. nicht nur das Tuch, sondern auch das Unterfutter bekommt. Nach geschehener Rechnung findet er, daß das Unterfutter eben so viel kostete, als 2. Ellen des Tuchs. Nun ist die Frage: Wie hoch kam ihm das Unterfutter zu stehen? Und was kostete die Elle? Antw. **Das Unterfutter kostete 6. Rtl. und 1. Elle von dem Tuch 3. Rtl.**

XXII. Einer kauft etliche Fäßer Wein vor 54. Rtl. Ein Faß aber kostet so viele Rtl. als er Fäßer gekauft hat, und noch halb so viele. Nun ist die Frage, wie viele Fäßer hat er aekauft? Und wie theuer 1. Faß? Antw. **Er kaufte 6. Fäßer, und hat vor 1. Faß 9. Rtl. gegeben.**

XXIII. Einige Männer und Frauen machen eine Gesellschaft aus, und verzehren etwas. Man berathschlaget sich, wie man die Schuld bezahlen soll. Eine von den Mannspersonen sagt: Wir Männer geben zu 3 gr. so ist die Schuld getilget. Eine von den Frauen sagt: Wir Frauen geben zu ~~5. gr. so kriegen wir noch zu einem halben gr. wieder.~~ Der Wirth sagt: Es ist am besten, daß die Männer zu 2 gr. und die Frauen zu ~~1½~~ gr. bezahlen, so gehet die Schuld auf. Nun ist die Frage: Wie groß war die Schuld? Wie viele Männer? Und wie viele Frauen waren in der

Gesellschaft? Antw. Die Schuld betrug 36. gr. 12. Männer, und 18. Frauen waren in der Gesellschaft.

XXIV. Ein Dieb entwendet einigen Reisenden ihre Gelder. Er wird bey dem Diebstahl ertappet, bittet um Gnade, und verspricht einem jeden von den Reisenden 10 mal so viele Rtl. zu geben, als der Reisenden da waren. Und also 10 mal so viel, als er gestohlen hat, und noch 100. Rtl. darüber. Doch, ich will noch, sprach er, 8. Rtl. darüber geben, so erstatte ich meinen Diebstahl 12. fach, und so gebe ich mein ganzes Vermögen von mir weg. Nun ist die Frage: Wie viele sind von den Reisenden gewesen? Wie groß war der Diebstahl? Und wie groß war sein Vermögen? Antw. Der Reisenden sind 8. gewesen, er hat 54. Rtl. gestohlen, und sein Vermögen bestund aus 648. Rtl.

XXV. Der Minutenzeiger weiset auf 60. Minuten, und der Stundenzeiger auf IV. Uhr. Man verlangt zu wissen 1. Wenn wird denn der Minutenzeiger den Stundenzeiger einholen, und ihn bedecken? 2. Wenn werden sie denn einen rechten Winkel einschließen? d. i. 15. Minuten von einander stehen? Und 3. wenn werden sie denn in einer geraden Linie stehen? Antw. Der Minutenzeiger wird den Stundenzeiger einholen in 21 $\frac{9}{11}$ Minuten. Er wird mit ihm einen rechten Winkel einschließen, wenn er auf 38$\frac{2}{11}$ Minuten weiset. Er wird in einer geraden Linie mit ihm stehen, wenn er 54$\frac{6}{11}$ Minuten weiset.

XXVI. Ein Courier ist vor 10. Tagen ausgegangen, und gehet täglich 3. Meilen. Ein andrer ist ihm jetzund nachgegangen, der täglich 5. Meilen gehet. Wenn wird er ihn einholen? Und wie

wie weit werden sie von hieher seyn, wenn er ihn einholen wird? Antw. Er wird ihn in 15. Tagen einholen, und sie werden 75. Meilen weit von hieher seyn, wenn ihn der letztere einholen wird.

XXVII. Ein Courier, der alle Tage 3. Meilen zurück legt, hat schon 20. Meilen zurück gelegt. Ein anderer, der täglich 5. Meilen gehet, will ihn einholen. Wenn wird er ihn einholen? Und wie weit werden sie von hieher seyn? Und wie viele Tage ist der erste schon ausgegangen? Antw. Nach 10. Tagen wird er ihn einholen. Wenn er 50. Meilen zurück legen wird. Der erste ist vor 6. Tagen und 16. Stunden ausgegangen.

XXVIII. Ein Courier, der täglich 4. Meilen gehet, ist vor 4. Tagen ausgegangen. Ein anderer will ihn in 8. Tagen einholen. Nun ist die Frage, wie viele Meilen muß er täglich gehen? Antw. 6. Meilen.

XXIX. Ein Courier gehet aus der Stadt A nach B. und gehet täglich 8. Meilen. Ein anderer ist zu gleicher Zeit ausgegangen, der aus B nach A gehet, und gehet täglich 5. Meilen. Die Stadt A liegt 130. Meilen weit von der Stadt B. Nach wie vielen Tagen werden sie sich begegnen? Und wie weit werden sie von den Oertern seyn, aus welchen sie ausgegangen sind. Antw. Sie werden sich nach 10. Tagen begegnen, da der erste 80. Meilen von A, und der zweyte 50. Meilen von B entfernet ist.

XXX. Einer läßt 5. Kannen vom weissen, und 8. Kannen vom rothen Wein holen, und giebt davor 12. Rtl. Den folgenden Tag läßt er noch von dem rothen 10. Kannen und von dem weissen 9. Kannen holen, und bezahlt davor 16. Rtl.

Was kostete die Kanne von dem rothen, und von dem weissen Wein? Antw. 1. Kanne von dem weissen kostete 1. Gulden, und 1. Kanne von dem rothen 1. Rtl.

XXXI. Ein Kaufmann wendet sein ganzes Vermögen auf die Handlung, und gewinnt gleich in dem ersten Jahr so viel, als er eingelegt hat. Nimmt davon 1000. Rtl. und kauft sich einen Garten. Das übrige legt er wiederum auf die Handlung. und gewinnt damit wiederum so viel, als er in dem ersten Jahr gewonnen hat. Er nimmt davon 4000. Rtl. und kauft sich davor einige Ländereyen. Das übrige legt er wiederum auf die Handlung, und gewinnt damit in dem dritten Jahr wiederum so viel, als in dem ersten Jahr. Er nimmt davon 1000. Rtl. kauft davor etwas. Das übrige war so groß, als das Kapital welches er in dem ersten Jahr auf die Handlung legte. Nun ist die Frage: wie groß war das Vermögen, welches er in dem ersten Jahr auf die Handlung legte? Antw. 2000. Rtl.

XXXII. Ein anderer Kaufmann wendet sein ganzes Vermögen auf die Handlung, und gewinnt gleich in dem ersten Jahr noch einmal so viel, als er eingelegt hat. Nimmt davon 6000. Rtl. und kauft sich davor ein Haus. Das, was ihm übrig geblieben war legt er wiederum auf die Handlung, und gewinnt damit so viel als er zum zweytenmal eingelegt hat. Er nimmt davon 8000. Rtl. und kauft sich davor ein Gut. Das übrige legt er wiederum auf die Handlung, und gewinnt wiederum so viel als er jetzund eingelegt hat. Jetzund hatte er noch einmal so viel als er anfänglich hatte. Es frägt sich; wie groß war sein Vermögen anfänglich? Antw. Er hatte anfänglich 4000. gehabt.

XXXIII Zweytausend Soldaten wurden durch Versprechung einer Belohnung von 1999000. Rtl. zu Besteigung einer Festung so aufgemuntert, daß der erste etwas bekömmt, der folgende immer um 2. Rtl. weniger. Allein von den ersten sind viele geblieben, und sind unter die letzten, die noch mit dem Leben davon gekommen sind 24975. Rtl. ausgetheilt worden. Es wird gefragt, wie viel soll der erste kriegen? Antw. 1999. Rtl. und wie viel sind geblieben? Antw. 1500.

XXXIV. Einer will seine Schulden von a Rtl. in einigen Jahren bezahlen, und will jährlich vom Kapital nebst den Zinsen b. Rtl. abtragen. In wie viel Jahren wird er seine Schulden völlig bezahlen?

XXXV. Ein Diener macht folgenden Vergleich mit seinem Herrn. Er bittet sich vor das erste Jahr nur etwas weniges aus, allein der Lohn soll jährlich um 2. Rtl. erhöhet werden. Der Herr überlegt dieses, und befindet, daß wenn er 20. Jahr dienen sollte, so käme ihm auf ein jedes Jahr 25. Rtl. zu. Wie viel verlangte er vor das erste Jahr? Antw. 6. Rthl.

Anm. Wenn aus einem Gefäße in einer gewissen Zeit etwas Wasser fließet, und es wird die Röhre 4. mal so lang gemacht, so fließt in der Zeit 12. mal so viel heraus. Kurz, die Geschwindigkeiten werden sich verhalten, wie die Quadrat-Wurzeln als der Länge Röhren. Wenn der Körper vermöge seiner Schwere herunter fällt, so bewegt er sich in der ersten Secunde durch 151. Pariser Zolle herunter, in der zweyten Secunde durch 453. Zolle. Denn, der Raum, den ein fallender Körper in einer jeden Secunde durchstreicht, stehet in einer Arithmetischen Progreßion, in welcher das erste Glied ist 151. Zoll, und die Dif-

ferenz 302. Zoll. Diese Sätze werden zu den angenehmsten und wichtigsten Aufgaben Gelegenheit geben, die ich hier des Raums wegen weglassen muß.

# Der II. Theil.

## Enthaltend die unbestimmte Aufgaben.

Die unbestimmte Aufgaben lassen sich bequem in zwey Classen abtheilen. Denn es betreffen einige solche Zahlen, die sich in gar keiner solchen Verhältniß befinden, andere aber solche, die sich in einer gewissen Verhältniß befinden. Wir wollen von den ersten in dem I. Cap. von den zweyten aber, in dem II. Cap. handeln.

## Capitel I.

### Enthaltend die unbestimmte Aufgaben, die solche Zahlen betreffen, die sich in keiner Verhältniß befinden.

#### Die 1. Aufgabe.

§. 31.

Zu erfahren, was heraus kömmt, wenn man die Differenz zu der Summe zweyer gegebenen Zahlen addiret.

Auf-

Auflösung.

1. Benennung. Es sey die größere x die kleinere y. So ist ihre Summe x + y, und die Differenz x — y.

2. Reduction.

$$\begin{array}{r} x + y \\ x - y \\ \hline 2x \end{array}$$

Eine Regel. Wenn man die Differenz von zwey Zahlen zu der Summe der zwey Zahlen addiret, so kömmt das Zwiefache von der größeren. Es sey z. E. die größere 8. die kleinere 2. So ist ihre Summe 10. und ihre Differenz 6. Wenn man also 6. zu den 10. addiret, kommet das Zwiefache von 8. heraus nämlich 16.

Anm. Ich habe einmal für allemal hier die Regel formiret. Bemühet euch aber jederzeit die Regel zu formiren, welches einen überaus großen Nutzen haben wird.

## Die 2. Aufgabe.

§. 32.

Zu erfahren, was herauskömmt, wenn man die Differenz von zwey gegebenen Zahlen, von ihrer Summe subtrahiret.

### Auflösung.

1. Benennung. Es sey die größere x. die kleinere y. So ist ihre Summe $x + y$ und die Differenz $x - y$. Dieses $x - y$ soll nun subtrahiret werden. Folglich

| | |
|---|---|
| $x + y.$ | Probe. Es sey $x = 8.\ y = 2.$ |
| $-x + y.$ | So ist $x + y = 10.\ x - y = 6.$ |
| $2y.$ | $(x + y) - (x - y) = 4 = 2y.$ |

## Die 3. Aufgabe.

§. 33.

Zu erfahren, was herauskömmt, wenn man das Product von zwey Zahlen durch ihren Quotienten multipliciret.

### Auflösung.

1. Benennung. Es sey die eine x. die andere y. so ist ihr Product xy. und ihr Quotient $\frac{x}{y}$. Folglich $(xy), \left(\frac{x}{y}\right) \frac{x^2 y}{y} = x^2$.

Probe. Es sey $x = 8.\ y = 2.$ So ist $xy = 16.$ $\frac{x}{y} = 4.\ 16, 4 = 64 = x^2.$

## Die 4. Aufgabe.

§. 34.

Zu erfahren, was herauskömmt, wenn man das Product von zwey Zahlen durch ihren Quotienten dividiret.

### Auflösung.

Es sey die eine x, die andere y. So ist ihr Product xy. ihr Quotient $\frac{x}{y}$. Folglich $(xy):$

$$\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{xy^2}{x} = y^2.$$

Probe. Es sey $x = 8$ $y = 2$. So ist $xy = 16$. $x:y = 4$. $16:4 - 4 = y^2$.

## Die 5. Aufgabe.

§. 35.

Zu finden, wie die Zahlen beschaffen seyn müßen, deren Summe zweymal so groß ist als ihre Differenz.

### Auflösung.

1. Benennung. Es sey die größere x die kleinere y. So ist ihre Summe $x + y$ die Differenz $x - y$.

2. Gleichung. Weil $x + y$ zweymal so groß ist als $x - y$ so ist $\frac{x+y}{2} = x - y$.

3. Reduction.

$$\frac{x+y}{2.} = x - y$$

——————————————M. 2.

$$x + y = 2x - 2y$$

——————————————A. 2y.

$$x + y + 2y = 2x$$

——————————————S. x.

$$y + 2y = 2x - x$$

——————————————K.

$$3y = x.$$

4. Application. Also ist die eine dreymal so groß, als die andere. Es sey $y = 4$. so ist $x = 12$. Die Summe ist 16. und die Differenz 8. Die Summe aber 16. ist noch einmal so groß, als ihre Differenz 8.

## Die 6. Aufgabe.

§. 36.

Zu finden, wie die Zahlen beschaffen seyn müßen, deren Summe ihrem Product gleich seyn soll.

### Auflösung.

1. Benennung. Es sey die eine x, die andere y. So ist ihre Summe $x + y$. ihr Product $xy$.

2. Gleichung. Folglich $x + y = xy$.

3. Reduction. $x + y = xy$

$$\underline{\qquad\qquad} \text{S. } y.$$

$$x = xy - y$$

$$\underline{\qquad\qquad} \text{D. } x - 1$$

$$\frac{x}{x - 1} = y.$$

4. Application. Es sey $x = 2$. So ist y auch 2. Probe. 2, 2, = 2 + 2.

### Die 7. Aufgabe.

§. 37.

Zu finden, wie die Zahlen beschaffen seyn müßen, deren Differenz ihrem Quotienten gleich ist.

### Auflösung.

1. Benennung. Es sey die größere x, die kleinere y. So ist ihre Differenz $x - y$, ihr Quotient $\frac{x}{y}$. Folglich

2. Glei=

2. Gleichung. $x - y = \frac{x}{y}$.

3. Reduction. $x - y = \frac{x}{y}$

$$xy - y^2 = x \quad \text{M. } y.$$

$$xy = y^2 + x \quad \text{A. } y^2. \quad \text{S. } x.$$

$$xy - x = y^2 \quad \text{D. } y - 1.$$

$$x = \frac{y^2}{y - 1}.$$

4. Application. Es sey $y = 2$. so ist $x = 4$. Probe. $4 - 2 = 4 : 2$.

## Die 8. Aufgabe.

### §. 38.

Zu finden, wie die Zahlen beschaffen seyn müßen, denen folgende Eigenschaften zukommen. Wenn man ihre Differenz von ihrer Summe subtrahiret, so soll ihr Quotient herauskommen.

### Auflösung.

1. Benennung. Es sey die größere x. die kleinere y. So ist ihre Summe $x + y$, ihre Differenz $x - y$, und ihr Quotient $\frac{x}{y}$.

2. Gleichung. Folglich $x + y - x + y = \frac{x}{y}$.

3. Reduction. $x + y - x + y = \frac{x}{y}$ K.

$$2y = \frac{x}{y}$$ M. y.

$$2y^2 = x.$$

4. Application. Es sey $y = 3$. so ist $x = 18$. Ihre Summe ist 21. Die Differenz 15. und der Quotient 6. Probe. $21 - 15 = 6$ $18 : 3 = 6$.

## Die 9. Aufgabe.

### §. 39.

Die Differenz der Quadratorum zu finden, deren Wurzel nur um 1. unterschieden sind.

### Auflösung.

Es sey die eine Wurzel x. so die andere $x + 1$. Das Quadrat von x ist $x^2$ und von $x + 1$. $x^2 + 2x + 1$. Folglich $x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$.

Weil $2x + 1 = x + x + 1$. und x ist die Wurzel von dem einen, $x + 1$ aber von

dem andern: so sind die Quadrata um die Summe ihrer Wurzeln unterschieden.

Wenn man also von einer Zahl das Quadrat weiß, und man verlangt das Quadrat von der nächst größern zu wissen, so addire man nur zu dem Quadrato die Summe von den Wurzeln. Z. E. Es ist mir das Quadrat von 3 bekannt 9. man verlangt das Quadrat von 4 zu wissen. Man addire nur zu 9. die Summe von 3. und 4. nämlich 7 so kommt heraus 16. das ist, das Quadrat von 4.

## Die 10. Aufgabe.

### §. 40.

Zu finden, wie die Zahlen beschaffen seyn müßen, deren eine sich so verhält zu der andern, wie ihr Product zu ihrer Summe:

### Auflösung.

Es sey die eine Zahl x die andere y. So ist

$$x : y = xy : x + y.$$

$$x^2 + xy = xy^2 \quad \text{D. } x.$$

$$x + y = y^2 \quad \text{S. } y.$$

$$x = y^2 - y.$$

Es sey y = 4. So ist x = 12. Die Probe ist leicht zu machen.

## §. 41.

Ich will noch einige Aufgaben ohne aller Auflösung zur Uebung anführen.

I. Zu finden, wie die Zahlen beschaffen seyn müßen, deren Summe ein Quadrat ist von ihrer Differenz.

II. Zu finden, wie die Zahlen beschaffen seyn müßen, deren Summe so groß ist als das Product, welches aus der Multiplication der kleinern, und ihrer Differenz entstehet.

III. Zu finden, wie die Zahlen beschaffen seyn müßen, deren Summe und die Differenz zusammen genommen, dem Quadrato der kleinern gleich sind.

IV. Zu finden, wie die Zahlen beschaffen seyn müßen, deren Summe sich so verhält zu ihrer Differenz, wie ihr Product zu ihrem Quotienten.

V. Zu finden, wie die Zahlen beschaffen seyn müßen, deren eine sich so verhält zu der andern, wie ihre Summe zu ihrer Differenz.

VI. Zu finden, wie die Zahlen beschaffen seyn müßen, deren sich eine so verhält zu der andern, wie ihr Product zu ihrem Quotienten.

VII. Zu finden, wie die Zahlen beschaffen seyn müßen, derer Quatrata um den Cubum von der größeren oder kleineren unterschieden seyn müßen.

VIII. Zu finden, wie die Zahlen beschaffen seyn müßen, deren Summe der dritte Theil ist von ihrem Product.

IX. Zu finden, wie die Zahlen beschaffen seyn müßen, deren Summe und Differenz zusammen genommen der Summe gleich sind, die aus ihrem Product und ihrem Quotienten entstehen.

X. Zu finden, wie die Zahlen beschaffen seyn müßen deren Summe, Differenz und der Quotient zusamgenommen ihrem Producto gleich sind.

# Das II. Capitel.

## Enthaltend die unbestimmte Aufgaben, so die Zahlen, welche sich in einer gewissen Verhältniß befinden, betreffen, und zwar

### §. 42.

I. Die sich in einer arithmetischen Proportion befinden. Was eine arithmetische Proportion sey, ist §. 12. Alg. gesagt worden. Verlanget ihr nun euch allerhand Eigenschaften von der arithmetischen Proportion bekannt zu machen: so machet allerley Veränderungen mit den Gliedern, welche die arithmetische Proportion ausmachen. Versetzet sie, addiret ihnen etwas, subtrahiret ꝛc. nehmet zwey Proportiones, addiret sie, subtrahiret sie ꝛc. so aber, daß die Gleichheit der Theile der Gleichung bleibe, so werdet ihr genug Eigenschaften entdecken. Es sey das erste Glied p. das zweyte s. das dritte t. das vierte q. Wir wollen nun solche Eigenschaften suchen

I. Durch die Versetzung der Glieder.

Es sey

$p - s = t - q$

A. $q + s$.

$p + q = t + s$.

$p - s = t - q$.

A. $s$.

$p = t + s - q$.

S. $t$.

$p - t = s - q$.

$p - s = t - q$

S. $p$.

$- s = t - q - p$

A. $q$.

$q - s = t - p$.

II. Durch die Add. Subt. Mult. und die Divis. mit einer Größe.

Es sey

$p - s = t - q$

A. $a$.

$p + a - s = t + a - q$.

$p - s = t - q$

S. $a$.

$p - s - a = t - q - a$.

$p - s = t - q$.

M. $a$.

$ap - as = at - aq$.

$p - s = t - q$.

D. $a$.

$$\frac{p}{a} - \frac{s}{a} = \frac{t}{a} - \frac{q}{a}$$

III. Durch die Subt. Mult. und die Divis. zwey Proportionen.

$$p - s = t - q$$
$$P - S = T - Q.$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad A.}$$
$$p + P - s - S = t + T - q - Q.$$

Anm. Es ist zu mercken, daß eine jede Gleichung, die unmittelbar vor den zwey Strichen stehet, ein Lehrsatz sey, der uns die Eigenschaften der Proportion bekannt machet, und den man immer wörtlich ausdrücken kann, wenn man nur anstatt der Buchstaben die Namen braucht z. E. $p + q = t + s$. drückt sich so aus: Die Summe von dem ersten und letzten Gliede ist gleich der Summe von dem zweyten und dritten Gliede. Und so kann man einen jeden ausdrücken.

§. 43.

II. Die sich in einer geometrischen Proportion befinden. Was eine geometrische Proportion sey, ist §. 13. Alg. gesagt worden. Wenn sich der Unterscheid der zwey ersten so verhält zu dem Unterscheid der zwey letzten, wie die erste zu der vierten, so sind sie in einer harmonischen Proportion. Verlanget man nun sich allerhand Eigenschaften von der geometrischen Proportion bekannt zu machen, so verfahre man eben so, als bey der arithmetischen Proportion. Es sey das erste Glied p. das zweyte s. das dritte t. und das vierte q.

I. Durch

**I. Durch die Versezung der Glieder.**

Es sey

$p : s = t : q.$

$\frac{p}{s} = \frac{t}{q}$ M. s. q.

$pq = st.$

$pq = st.$ D. t.

$\frac{pq}{t} = \frac{st}{t}$ K.

$\frac{pq}{t} = s$ D. q.

$\frac{pq}{qt} = \frac{s}{q}$ K.

$\frac{p}{t} = \frac{s}{q}.$

&c.

**II. Durch die A. S. M. und die Divis.**

$\frac{p}{s} = \frac{t}{q}$ A.

$\frac{p+s}{s} = \frac{t+q}{q}$

$\frac{p}{s} = \frac{t}{q}$ S.

$\frac{p-s}{s} = \frac{t-q}{q}$

&c.

**III. Durch die A. S. M. und die D. zwey Proportionen.**

$p : s = t : q$

$P : S = T : Q.$ M.

$\frac{pP}{sS} = \frac{tT}{qQ}.$

$p : s = t : q.$

$p : s = t : q.$ M.

$p^2 : s^2 = t^2 : q^2.$

$p^2 : s^2 = t^2 : q^2$

$p : s = t : q.$ M.

$p^3 : s^3 = t^3 : q^3$

&c.

Anm. Hier ist eben das, was bey der arithmetischen Proportion zu merken, nämlich, daß die Gleichungen, die vor den zwey Strichen gehen, Lehrsätze sind, die man wörtlich ausdrücken kann. Z. E. pq =st. Das Product des ersten und vierten Gliedes ist gleich dem Product des zweyten und dritten Gliedes. $\frac{p}{t} = \frac{s}{q}$. Wie sich das erste Glied verhält zu dem dritten, so verhält sich das zweyte zu dem vierten &c. Merket nur, wie leicht diese Lehrsätze hergeleitet worden sind, die man doch in der Rechenkunst auf eine sehr mühsame Weise beweisen muß.

§. 44.

III. Die sich in einer arithmetischen Progreßion befinden. Eine arithmetische Progreßion ist eine Reihe Zahlen, in welcher die folgende immer um eine gewisse Zahl größer oder kleiner ist, als die vorhergehende, z. E. 2. 4. 6. 8. 10. 12. Oder 15. 13. 11. 9. 7. 5. 3. 1. Die erste, in welcher die Glieder immer größer sind, wird eine zunehmende, die zweyte, in welcher die Glieder immer abnehmen, wird eine abnehmende Progreßion genannt. Die Zahl, um welche das folgende Glied größer, oder kleiner ist, wird die Differenz genannt. z. E. in dem angeführten Beyspiel ist die Differenz 2. Um einige Lehrsätze von dieser Progreßion zu entdecken, schreibet eine Progreßion auf, und gebet

det auf ihre Verhältniß ganz genau Achtung. Es sey das erste Glied p. Differenz der Glieder d. die Anzahl der Glieder n das letzte Glied u. und die Summe aller Glieder zusammen genommen s.

| I. | II. | III. | IV. | V. | VI. | VII. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p. | p+d. | p+2d. | p+3d. | p+4d. | p+5d | p+6d. |

Die 1. Anm. Wenn man diese Progreßion betrachtet, so wird man folgendes wahrnehmen können.

1. Daß die Summen der ersten, der zweyten, der dritten ꝛc. von der rechten und der linken Hand gezählten Glieder unter einander gleich seyn. z. E.

| | |
|---|---|
| 3. 5. 7. 9. 11. 13. | 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. |
| 7. 5. 3. | 9. 7. 5. 3. |
| 16. 16. 16. | 18. 18. 18. 18. |

Woraus erhellet, daß man die Summe von allen den Gliedern, die sich in einer arithmetischen Progreßion befinden, finden könne, wenn man nur die Summe von dem ersten und letzten Gliede mit der halben Anzahl der Glieder multipliciret. Oder, wenn man die Summe von dem ersten und letzten Gliede mit der Anzahl der Glieder multipliciret, und das Product mit 2. dividiret. z. E. Wollte man die Summe von der Progreßion 3. 5. 7. 9. 11. 13. wissen: so multipli-

pli-

plicire man nur 13 + 3. = 16 mit 3. Dieses Product 48 ist so groß als die Summe von der ganzen Progreßion. Wir wollen das so ausdrücken: $\frac{np + nu}{2} = s.$

2. Daß das letzte Glied in einer zunehmenden Progreßion die Summe sey aus dem ersten Gliede, und dem Product, wlches entstehet, wenn man die Anzahl der Glieder weniger 1. mit der Differenz multipliciret. Wir können dieses folgendergestalt ausdrücken. $u = p + nd - d$.

Die 2. Anm. Weil p das erste, u das letzte Glied n die Anzahl der Glieder, und d die Differenz bedeutet: so kann man durch Hilfe der zwey Gleichungen das erste oder letzte Glied der Differenz, und die Anzahl der Glieder entdecken, wenn man nur in der Gleichung an der Stelle dasjenige, was uns unbekannt ist, x setzet. Z. E. Man verlangt die Anzahl der Glieder zu wissen.

| Nach der ersten Gleichung. | Nach der zweyten Gleichung. |
| --- | --- |
| $\frac{np + nu}{2} = s.$ | $u = p + nd - d.$ |
| ——— M. 2. | ——— A. d. |
| $np + nu = 2s$ | $u + d = p + ud$ |
| ——— D. | ——— S. p. |
| $n = \frac{2s}{p + u.}$ | $u + d - p = nd$ |
| | ——— D. d. |
| | $\frac{u + d - p}{d} = n.$ |

§ 45.

§. 45.

IV. Die sich in einer Geometrischen Progreßion befinden. Eine Geometrische Progreßion ist eine Reihe Zahlen, in welcher die folgende immer gleich vielmal größer oder kleiner ist, als die vorhergehende. Z. E. 1. 2. 4. 8. 16. 32. oder 32. 16. 8. 4. 2. 1. Die erste, in welcher die Glieder zunehmen, wird die zunehmende, die andere aber, in welcher die Glieder abnehmen, eine abnehmende Progreßion genannt. Die Zahl, die uns zeigt, wie vielmal die folgende größer oder kleiner ist als die vorhergehende, wird der Exponent genannt. Z. E. in dem vorhergehenden Exempel ist der Exponent 2. Will man sich nun allerley Eigenschaften von dieser Progreßion bekannt machen, so schreibe man nur eine auf, so werden die Eigenschaften derselben sehr leicht in die Augen fallen. Es sey das erste Glied p. der Exponent e. so ist die folgende Reihe eine Geometrische Progreßion.

| I. | II. | III. | IV. | V. | VI. | VII. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $pe$ | $pe^2$ | $pe^3$ | $pe^4$ | $pe^5$ | $pe^6$. |

Anm. Hieraus sind folgende Sätze sehr leicht einzusehen.

1. Die Producta der ersten, zweyten ꝛc. von rechten und der linken Hand gezählten Glieder sind unter einander gleich.

2. Das letzte Glied ist ein Product, welches der aus dem ersten Gliede und dem Exponente entstehet, welcher sich in einer Potenz befindet, de-

ren Exponent die Anzahl der Glieder ist weniger 1.

3. Die Summe aller Glieder entstehet, wenn man die Differenz des ersten und letzten Gliedes durch den um 1. vergeringerten Exponenten dividiret, und zu diesem Quotienten das letzte Glied addiret. Dieses kann man so ausdrücken. Es sey die Summe = s.

$$\frac{pe^n - p}{e - 1} + pe^n = s.$$

§. 46.

## V. Von den Logarithmis.

Wenn unter einer Geometrischen Progreßion eine Arithmetische gesetzet wird, deren das erste Glied o. ist, so werden die Glieder der Arithmetischen Progreßion die Logarithmi von den Gliedern der Geometrischen Progreßion, die darüber stehen, genannt. Z. E. 3. ist der Logarithmus von 8. 5. von 32. 2c.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 2. | 4. | 8. | 16. | 32. | 64. |
| o. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. |

Schreibet nun zwey Progreßiones eine Geometrische, und darunter eine Arithmetische.

| I. | II | III. | IV. | V. | VI. | VII. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p. | pe, | $pe^2$. | $pe^3$. | $pe^4$. | $pe^5$. | $pe^6$.&c. |
| o. | d. | 2d. | 3d. | 4d. | 5d. | 6d.&c. |

Anm. Hieraus sind folgende Sätze sehr leicht einzusehen.

1. Der Exponent des Exponenten ist der Zahl gleich, aus deren Multiplication mit der Differenz der Logarithmus entstehet.

2. Die

2. Die Summe von zwey Logarithmis ist der Logarithmus von dem Product, welches aus der Multiplication der Glieder entstehet, deren die Summirte Logarithmi, Logarithmi waren.

3. Die Differenz von zwey Logarithmis, ist der Logarithmus von dem Quotienten, der entstehet, wenn man das größere Glied durch das kleinere dividiret, deren die subtrahirte Logarithmi, Logarithmi waren.

## Ende der Anwendung der Algebra auf die Rechenkunst.

Butschany, Matthias

Anfangsgründe der Algebra, nebst derselben Anwendung auf die Rechenkunst

Wien 1767

Regensburg, Staatliche Bibliothek -- 999/Philos.1201
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11110048-7
VD18 11007044-003